

第二章 随机变量及其分布

本章导读

第一章解决了“事件发生的可能性有多大”，但如果每道题都用文字命名事件，知识仍然比较零散。本章引入随机变量，把试验结果数值化，再用分布函数、分布律或概率密度统一记录全部概率信息。后续的数字特征、极限定理和数理统计都建立在这些对象上。

$$\begin{aligned} \text{随机试验} &\longrightarrow \text{随机变量 } X \longrightarrow \text{分布函数 } F_X, \\ &\longrightarrow \begin{cases} \text{离散型: 分布律 } p_k, \\ \text{连续型: 概率密度 } f_X, \end{cases} \longrightarrow \text{随机变量函数 } Y = g(X). \end{aligned}$$

学习本章时始终先问三件事：

1. 研究的随机变量是什么，它可能取哪些值？
2. 它属于离散型、连续型，还是两者都不是？
3. 已知的是分布函数、分布律还是密度，应使用求和、积分还是变量变换？

2.1 随机变量与分布函数

2.1.1 从文字事件到数值变量

定义 2.1 (随机变量)

设随机试验的样本空间为 Ω 。定义在 Ω 上、取实数值的单值函数

$$X = X(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

称为随机变量。本课程中可直观理解为：每个试验结果 ω 都被唯一地赋予一个数 $X(\omega)$ 。

随机变量的“大写”表示取值尚未确定;小写字母 x 表示一个已经指定的实数. 随机变量不是“会自己变化的普通未知数”,而是把样本点翻译成数值的函数.

例题 2.2 (三个背景中的随机变量)

1. 从含 5 件废品的 50 件产品中抽取 3 件, 令 X 为废品数, 则 $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, “至多两件废品”为 $\{X \leq 2\}$.
2. 购买一台电脑, 令 X 为使用寿命, 则 X 可在某个连续区间内取值, “使用超过五年”为 $\{X > 5\}$.
3. 抛一枚硬币, 规定正面记为 1、反面记为 0, 则 $X \in \{0, 1\}$. 这说明非数值结果也可以通过赋值成为随机变量.

注: 不同的样本点可以对应同一个随机变量值, 但同一个样本点不能对应两个不同值. 对任意 $x_1 \neq x_2$, 事件 $\{X = x_1\}$ 与 $\{X = x_2\}$ 必然互斥.

2.1.2 分布函数: 把全部概率装进一个函数

定义 2.3 (分布函数)

随机变量 X 的分布函数定义为

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

它表示 X 的取值落在实数 x 左侧 (包含 x) 的概率.

分布函数的自变量必须覆盖整个实数轴. 知道 F_X 后, 任何区间事件的概率都可由端点处的函数值或左极限得到.

定理 2.4 (由分布函数计算区间概率)

记

$$F_X(a-0) = \lim_{x \uparrow a} F_X(x).$$

则

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= F_X(a), & P(X < a) &= F_X(a - 0), \\ P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a), & P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a - 0), \\ P(a < X < b) &= F_X(b - 0) - F_X(a), & P(X = a) &= F_X(a) - F_X(a - 0). \end{aligned}$$

证明: 证明目标: 从定义推出区间概率与跳跃点概率的公式.

出发点: 分布函数定义、事件包含关系和概率的减法公式.

关键转换: 把目标区间写成两个嵌套事件之差. 例如

$$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}.$$

正式推导: 因为 $\{X \leq a\} \subseteq \{X \leq b\}$,

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

又因为

$$\{X = a\} = \{X \leq a\} \setminus \{X < a\},$$

所以

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a - 0).$$

其余开闭区间公式同理, 只需根据端点是否包含选择 $F_X(\cdot)$ 或 $F_X(\cdot - 0)$.

证明小结: 真正起作用的是“右端大范围减去左端小范围”. 离散型分布函数可能跳跃, 不能随意把左极限替换为函数值; 连续型情形才可忽略端点开闭. ■

性质 2.5 (分布函数的充要条件)

函数 F 是某个随机变量的分布函数, 当且仅当:

1. F 单调不减;
2. F 右连续;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

由这些条件还可推出 $0 \leq F(x) \leq 1$.

注: 分段书写分布函数时, 可统一采用“左闭右开”, 即等号跟随 $x \geq a$ 的一段, 以便直接满足右连续. 但这只是排版口诀, 最终仍应以右连续性为判断依据.

左极限公式和充要条件的严格分析证明属于 C 级: 本阶段会准确使用, 不要求用数列极限或海涅定理完整复现.

例题 2.6 (跳跃点与区间概率)

设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

求 $P(X = 1)$ 与 $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)$.

选择方法的原因: 题目直接给出分布函数, 先用端点公式, 不必猜测随机变量类型.

$$P(X = 1) = F(1) - F(1 - 0) = (1 - e^{-1}) - \frac{1}{2}.$$

而 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 同处于分布函数的常数段,

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2} - 0\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

检查: 第一个结果对应 $x = 1$ 处的向上跳跃量; 常数段内没有概率累积, 所以第二个概率为零.

例题 2.7 (验证一个函数是否为分布函数)

判断

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

能否成为分布函数.

验证目标: 逐项检查分布函数的充要条件.

出发点: 单调性、右连续性和两端极限.

关键转换: 分段内部用初等函数性质, 唯一需单独检查的点是 $x = 0$.

逐项验证:

1. 两段均单调不减, 且 $F(0) = 0$, 跨越分段点时没有下降;
2. $\lim_{x \downarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$, 故在 0 处右连续; 其余点连续;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$.

四项全部满足, 因此它是分布函数.

验证小结: 分段函数不能只看取值是否在 $[0, 1]$; 最容易漏掉的是分段点右连续和正负无穷处的极限.

注: [分布函数的简单变换] 若 F, G 都是分布函数, 则:

- $aF + bG$ 在 $a, b \geq 0, a + b = 1$ 时仍是分布函数;
- $F(x)G(x)$ 仍是分布函数;
- $F(ax + b)$ 对 $a > 0$ 一定仍是分布函数; $a < 0$ 会反转单调性, 一般不成立;
- 若 F 连续, 则 $1 - F(-x)$ 是分布函数; 一般情形需用左极限修正为 $1 - F(-x - 0)$.

小结

本节把文字事件统一成随机变量的取值范围, 再用 $F_X(x) = P(X \leq x)$ 收集全部概率信息. 使用时先辨认大写随机变量与小写实数, 再根据端点开闭选择函数值或左极限; 验证分布函数必须检查单调不减、右连续和两端极限.

2.2 离散型随机变量与常见分布

2.2.1 分布律及其与分布函数的关系

定义 2.8 (离散型随机变量与分布律)

若随机变量 X 的全部可能取值为有限个或可列无限多个

$$x_1, x_2, \dots,$$

则称 X 为离散型随机变量. 记

$$P(X = x_k) = p_k,$$

称 $\{p_k\}$ 为 X 的概率分布或分布律.

性质 2.9 (分布律的充要条件)

$$p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

反之, 任何满足这两项的数列都可作为某个离散型随机变量的分布律.

离散型概率计算只有一个核心动作: 找出目标事件包含的所有可能取值, 再把相应概率相加. 其分布函数为

$$F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

因此图像呈右连续的阶梯形, 在 x_k 处的跳跃量恰为 p_k .

例题 2.10 (抽球最大号码)

袋中有编号 1, 2, 3, 4, 5 的五只球, 同时任取三只, 令 X 为三只球中的最大号码. 求 X 的分布律及 $F_X(4.5)$.

先找取值: 最大号码只能为 3, 4, 5. 再分别计数:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10},$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10},$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

所以

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \frac{1}{10}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{2}{5}, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases} \quad F_X(4.5) = \frac{2}{5}.$$

检查: 三项概率之和为 1; 分布函数从 0 逐级累加到 1.

2.2.2 二项分布与 0-1 分布

定义 2.11 (二项分布)

进行 n 次相互独立、条件相同的伯努利试验, 每次事件 A 发生的概率为 p . 令 X 为 A 发生的次数, 则

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

记作 $X \sim B(n, p)$.

注: 识别二项分布时检查三项: 有固定的 n 次独立重复试验; 每次只关心同一事件是否发生且概率不变; 随机变量统计该事件发生的次数. 少一项都不能直接套二项分布.

例题 2.12 (宿舍考试与“至少一次成功”)

1. 三名学生独立参加考试, 每人通过率为 $2/3$. 求至少两人挂科的概率.
2. 每次独立试验成功概率为 0.5 . 至少进行多少次, 才能使至少成功一次的概率不小于 0.9 ?

第 1 题: 令 X 为挂科人数, 则 $X \sim B(3, 1/3)$. 因此

$$P(X \geq 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}.$$

第 2 题: 令 X 为 n 次试验中的成功次数, 则 $X \sim B(n, 0.5)$. 正面累加项太多, 取反更快:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.5^n \geq 0.9.$$

由 $0.5^n \leq 0.1$ 得最小整数 $n = 4$. 检查: $n = 3$ 时概率为 $0.875 < 0.9$, $n = 4$ 时为 0.9375 .

例题 2.13 (两阶段质检后再用二项分布)

一台仪器以概率 0.7 直接出厂; 否则进入调试, 调试后以概率 0.8 出厂. 各台仪器相互独立. 生产 n 台, 求全部出厂以及恰有两台不能出厂的概率.

先解决单台出厂概率. 令 B 表示“直接出厂”, A 表示“最终出厂”, 则

$$P(A) = P(B) + P(\bar{B})P(A | \bar{B}) = 0.7 + 0.3 \times 0.8 = 0.94.$$

令 X 为最终出厂台数, 则 $X \sim B(n, 0.94)$. 所以

$$P(X = n) = 0.94^n,$$

$$P(X = n - 2) = \binom{n}{2} (0.06)^2 (0.94)^{n-2}.$$

关键转折: 二项分布的参数 p 不是题面第一阶段的 0.7 , 而是先用全概率公式算出的最终成功概率 0.94 .

定义 2.14 (0-1 分布)

若 X 只取 0, 1, 且

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p,$$

则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, 也称伯努利分布. 它是 $B(1, p)$.

2.2.3 几何分布与首次发生问题

定义 2.15 (几何分布)

独立重复进行伯努利试验, 每次成功概率为 p . 令 X 为首次成功时所进行的试验次数, 则

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots,$$

记作 $X \sim Ge(p)$.

例题 2.16 (首次命中)

独立射击同一目标, 每次命中概率为 $1/4$, 直到命中为止. 令 X 为射击次数, 则

$$X \sim Ge\left(\frac{1}{4}\right), \quad P(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{9}{64}.$$

“前 $k - 1$ 次失败, 第 k 次成功”是几何分布公式的直接含义.

例题 2.17 (第四次射击恰为第二次命中)

每次命中概率为 p . 第四次射击恰好是第二次命中, 意味着第四次必命中, 前三次恰有一次命中. 因此

$$P = \binom{3}{1} p(1 - p)^2 \cdot p = 3p^2(1 - p)^2.$$

这不是几何分布, 因为研究的不是“首次命中”; 前三次部分使用二项计数.

注: 考研专项: 若研究第 r 次成功发生时的试验次数, 会得到负二项分布. 普通课程基础阶段只会像上例一样把“最后一次固定成功”和“前面恰有 $r - 1$ 次成功”拆开, 不额外背新公式.

2.2.4 泊松分布与泊松近似

定义 2.18 (泊松分布)

若

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0,$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记作 $X \sim P(\lambda)$.

泊松分布常描述固定时间或区域内稀有事件发生的次数, 如客流量、故障数或缺陷数.

例题 2.19 (由相邻概率确定参数)

若 $X \sim P(\lambda)$ 且 $P(X = 2) = P(X = 3)$, 则

$$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!},$$

由 $\lambda > 0$ 得 $\lambda = 3$. 于是

$$P(X = 1) = 3e^{-3}.$$

例题 2.20 (从一般分布律识别泊松分布)

设

$$P(X = k) = \frac{C}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

求 C 与 $P(X \geq 2)$.

先用分布律的归一性:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = Ce, \quad C = e^{-1}.$$

因此 $X \sim P(1)$. 取反比从 $k = 2$ 向无穷求和更简单:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

检查: 结果位于 $[0, 1]$ 内.

定理 2.21 (泊松近似二项分布)

若 $X_n \sim B(n, p_n)$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$np_n \rightarrow \lambda > 0,$$

则对固定的非负整数 k ,

$$P(X_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

注: 证明思路 (B/C 级): 把二项概率中的组合数、 p_n^k 和 $(1 - p_n)^{n-k}$ 分别整理, 核心极限是

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}.$$

泊松定理的严格极限证明属于 C 级, 本阶段不要求复现. 做题时只有题目明确要求近似, 或课程给出适用标准时才用; 否则优先保留精确二项式. 常见经验条件 n 较大、 p 较小只是近似准则, 不是定理条件的替代品.

例题 2.22 (次品数的泊松近似)

独立抽取 100 件产品, 每件为次品的概率为 0.05. 令 X 为次品数, 则

$$X \sim B(100, 0.05) \approx P(5).$$

若题目要求使用泊松近似,

$$P(X \geq 3) \approx 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!}\right).$$

2.2.5 超几何分布: 无放回抽样

定义 2.23 (超几何分布)

总体有 N 件, 其中 M 件为目标类别; 无放回抽取 n 件, 令 X 为抽到的目标件数, 则

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

其中

$$\max\{0, n - (N - M)\} \leq k \leq \min\{n, M\}.$$

记作 $X \sim H(N, M, n)$ (符号顺序以教材为准) .

注: 二项分布与超几何分布的关键区别:

比较项	二项分布	超几何分布
抽样方式	有放回或每次概率不变	无放回
各次结果	独立	一般不独立
成功概率	每次均为 p	随抽样结果改变

当总体很大、抽样比例很小时, 无放回对总体比例的影响很小, 此时可近似使用

$$B\left(n, \frac{M}{N}\right).$$

是否使用近似应服从题目要求.

例题 2.24 (抽到第一件合格品所需次数)

一批产品有 10 件合格品、3 件次品, 逐件抽取, 直到抽到合格品为止. 令 X 为抽取次数, 分别讨论有放回与无放回.

有放回: 每次抽到合格品的概率保持 $10/13$, 故

$$X \sim Ge\left(\frac{10}{13}\right), \quad P(X = k) = \left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \frac{10}{13}.$$

无放回: 最多连续抽出三件次品, 所以 $X \in \{1, 2, 3, 4\}$. 依次使用乘法公式:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{10}{13}, \\ P(X = 2) &= \frac{3}{13} \frac{10}{12}, \\ P(X = 3) &= \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{10}{11}, \\ P(X = 4) &= \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

检查: 四项之和为 1. 本题也说明“第 k 次首次抽到合格品”比“第 k 次抽到合格品”条件更强, 不能误用抽签原理.

小结

离散型随机变量的分布由“可能取值 + 对应概率”组成, 计算概率就是对互斥取值求和. 识别常见分布时先读背景: 固定次数的成功数用二项分布, 首次成功次数用几何分布, 固定区间内的稀有计数常用泊松分布, 无放回抽样用超几何分布; 使用前必须核对独立性、是否放回、参数含义和取值范围.

2.3 连续型随机变量与概率密度

2.3.1 密度的含义与基本条件

定义 2.25 (连续型随机变量与概率密度)

若存在非负可积函数 f_X , 使随机变量 X 的分布函数可写为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 f_X 为 X 的概率密度函数, 简称密度.

密度 $f_X(x)$ 不是点概率. 它的高低反映 X 落在 x 附近的概率集中程度:

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f_X(t) dt \approx f_X(x)\Delta x.$$

改变密度在有限个点处的函数值不会改变任何积分, 也不会改变随机变量的分布.

性质 2.26 (密度的充要条件)

函数 f 能成为某个连续型随机变量的密度, 当且仅当

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

定理 2.27 (密度、分布函数与区间概率)

若 X 的密度为 f_X , 则

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \quad P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

在 f_X 的连续点处,

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

证明: **证明目标:** 从密度定义推出区间概率公式, 并说明何时能由分布函数求密度.

出发点: 密度定义、分布函数的区间概率公式和微积分基本定理.

关键转换: 把两个变上限积分相减, 化为固定区间积分.

正式推导:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t) dt - \int_{-\infty}^a f_X(t) dt \\ &= \int_a^b f_X(t) dt. \end{aligned}$$

若 f_X 在 x 处连续, 则由微积分基本定理,

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = f_X(x).$$

证明小结: “在哪个区间求概率, 就在哪个区间对密度积分”. 由 F_X 求 f_X 时只需在各连续区间求导; 有限个分段点处的密度值可任取, 但不能把分布函数的跳跃部分误当成普通导数. ■

定理 2.28 (连续型随机变量的点概率)

若 X 为连续型随机变量, 则对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X = a) = 0.$$

因此区间端点是否包含不影响概率, 例如

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

注: 证明思路 (B 级): 单点集合的积分为零,

$$P(X = a) = \int_{\{a\}} f_X(x) dx = 0;$$

也可用连续型分布函数连续, 得到 $F_X(a) - F_X(a - 0) = 0$.

“点概率为零”不表示该数值逻辑上不可能出现; 它表示单个点在连续尺度上没有正的概率质量. 不能把这一结论用于离散型随机变量.

注: [三个容易混淆的“连续”]

对象	正确结论	常见误判
连续型随机变量 X	其分布可由某个密度积分表示	不是说 X 是普通连续函数
分布函数 F_X	连续型情形下一定连续	分布函数连续未必在更高阶理论中推出 X 连续型
概率密度 f_X	只要求非负、可积且积分为 1	密度本身不必连续

例题 2.29 (判断随机变量的类型)

下列对象分别属于哪一类随机变量?

1. 已知 X 具有概率密度;
2. 令 $U = 1$ 表示事件 $\{X > 2\}$ 发生, 否则 $U = 0$;
3. 相邻两次故障之间的时间, 以及一段固定时间内的故障次数;
4. 分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

为什么这样判断: 先看取值是否可数, 再看分布函数是否连续. 第 1 个是连续型; 第 2 个只取 0, 1, 是离散型; 故障间隔通常按连续型建模, 而故障次数只能取非负整数, 是离散型. 第 4 个在区间内连续增长、又在 $x = 1$ 处跳跃, 因此既不是纯离散型, 也不是连续型, 而是混合型.

结果检查: “原变量连续”不能推出“它的任意函数仍连续”, 第 2 个对象正是反例.

2.3.2 从密度求参数、概率与分布函数

注: [连续型综合题的四步路线] 面对分段密度时, 不要一上来就积分. 建议固定按以下顺序处理:

1. **查合法性:** 先检查非负性, 再用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ 确定未知参数;
2. **画支持集:** 标出密度非零的区间, 目标事件只与支持集的交集有关;
3. **按分点积分:** 求概率时在目标区间积分, 求分布函数时把 x 经过的每个分点都列出来;
4. **做结果检查:** 概率应落在 $[0, 1]$, 分布函数应单调、连续且两端极限分别为 0, 1.

由已有密度构造新密度时必须重查归一性. 若 f_1, f_2 都是概率密度, 则 $af_1 + bf_2$ 在 $a, b \geq 0$ 且 $a + b = 1$ 时仍是密度; $f(1-x)$ 经变量代换后总积分不变. 相反, $2f(x)$ 的总积分为 2, 而 $f_1(x)f_2(x)$ 的总积分也未必等于 1, 一般不能直接作为密度.

例题 2.30 (分段密度综合题)

设

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ k(2-x), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 k 、 $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right)$ 、 $F_X(x)$ 以及 $P\left(X > \frac{1}{2} \mid X \leq 1\right)$.

第 1 步: 用归一性确定参数.

$$1 = \int_0^1 x dx + \int_1^2 k(2-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{k}{2},$$

故 $k = 1$.

第 2 步: 在目标区间积分.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right) &= \int_{1/2}^1 x dx + \int_1^{3/2} (2-x) dx \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

第 3 步: 先用支持集秒杀首尾两段, 再计算中间.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

第 4 步: 条件概率.

$$\begin{aligned} P\left(X > \frac{1}{2} \mid X \leq 1\right) &= \frac{P(1/2 < X \leq 1)}{P(X \leq 1)} \\ &= \frac{F_X(1) - F_X(1/2)}{F_X(1)} = \frac{1/2 - 1/8}{1/2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

检查: F_X 连续、单调不减, 且首尾极限为 0, 1.

例题 2.31 (全实轴上的双指数密度)

设

$$f_X(x) = Ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

求 A 、 $P(0 < X < 1)$ 和 $F_X(x)$.

由偶函数与归一性,

$$1 = 2A \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2A, \quad A = \frac{1}{2}.$$

所以

$$P(0 < X < 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

分布函数需按 $x = 0$ 分段:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

本例的支持集没有有限上下界, 因此 $F_X(x)$ 在有限点处既不取 0, 也不取 1, 只在两端趋近.

例题 2.32 (验证给定函数能否作为密度)

判断下列函数能否作为概率密度:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

验证目标: 检查非负性和归一性.

出发点: 密度的充要条件.

关键转换: 只在函数非零的支持区间积分.

逐项验证: 两者都非负, 但

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} dx = 2 \neq 1,$$

所以 f_1 不是密度; 而

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

所以 f_2 是密度.

验证小结: 图像“看起来像密度”不够; 高度必须与支持区间长度共同满足总面积为 1.

例题 2.33 (灯管寿命与二项分布的衔接)

灯管寿命 X 的密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则

$$P(X > 1500) = \int_{1500}^{\infty} \frac{1000}{x^2} dx = \frac{2}{3}.$$

任取 5 支且寿命相互独立, 令 Y 为寿命超过 1500 小时的支数, 则

$$Y \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right),$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \binom{5}{1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{232}{243}.$$

方法选择: 先用连续型积分求单支成功概率, 再用二项分布统计五支中的成功数.

小结

连续型随机变量用密度描述分布: 密度非负且总积分为 1, 区间概率由积分得到, 单点概率为零. 做综合题时依次完成“归一化求参数—按支持集分段积分—由积分写分布函数—必要时求导还原密度”; 遇到第二层计数问题, 再把单次概率交给二项分布.

2.4 三种常见连续型分布

2.4.1 均匀分布

定义 2.34 (均匀分布)

若

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布, 记作 $X \sim U(a, b)$. 其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

均匀分布的背景是“在区间内按长度等可能”. 因此对 $(c, d) \subseteq (a, b)$,

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

例题 2.35 (均匀分布与方程实根)

设 $X \sim U(1, 6)$. 求方程

$$t^2 + Xt + 1 = 0$$

有实根的概率.

方程有实根当且仅当判别式非负:

$$X^2 - 4 \geq 0.$$

结合 $X \in (1, 6)$, 事件化简为 $\{X \geq 2\}$. 均匀分布按长度计算,

$$P(X \geq 2) = \frac{6-2}{6-1} = \frac{4}{5}.$$

关键转折: 解出不等式后必须与随机变量的支持集取交集.

例题 2.36 (由随机取点识别均匀分布)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 令 X 为落点位置. “任意小区间的概率与长度成正比”正是均匀分布背景, 因此

$$X \sim U(0, 2), \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

2.4.2 指数分布与无记忆性

定义 2.37 (指数分布)

若 $\lambda > 0$ 且

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记作 $X \sim E(\lambda)$. 其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

指数分布常用于无明显老化阶段的等待时间或寿命. 对 $a > 0$,

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}.$$

若教材用尺度参数 $\theta = 1/\lambda$, 所有公式中的 λ 应替换为 $1/\theta$.

定理 2.38 (指数分布的无记忆性)

若 $X \sim E(\lambda)$, 则对 $s, t > 0$,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

证明: **证明目标:** 证明已经等待 s 后, 再等待超过 t 的概率与从零开始等待超过 t 的概率相同.

出发点: 条件概率定义与指数分布的尾概率公式.

关键转换: 因为 $s + t > s$,

$$\{X > s + t\} \subseteq \{X > s\}.$$

正式推导:

$$\begin{aligned} P(X > s + t \mid X > s) &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = P(X > t). \end{aligned}$$

证明小结: 无记忆性依赖指数尾概率的乘法结构. 它不是所有寿命分布的通性, 也不表示现实设备永不老化. ■

例题 2.39 (指数分布综合题)

设 $X \sim E(2)$, 求密度、分布函数、

$$P(X \leq a + 1 \mid X > a) \quad (a > 0),$$

$F_X(2)$ 和 $P(X = 1)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

利用条件事件中的对立关系和无记忆性,

$$\begin{aligned} P(X \leq a+1 \mid X > a) &= 1 - P(X > a+1 \mid X > a) \\ &= 1 - P(X > 1) = 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

此外

$$F_X(2) = 1 - e^{-4}, \quad P(X = 1) = 0.$$

2.4.3 正态分布与标准化

定义 2.40 (正态分布)

若 $\sigma > 0$ 且

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < +\infty,$$

则称 X 服从均值参数为 μ 、方差参数为 σ^2 的正态分布, 记作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

密度曲线关于 $x = \mu$ 对称, 在 $x = \mu$ 处最高; 越远离 μ , 附近概率密度越小. 因此

$$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}.$$

性质 2.41 (3σ 原则)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则近似有

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0.6827,$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 0.9545,$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 0.9973.$$

超出 $\mu \pm 3\sigma$ 的结果很少见, 但并非逻辑上不可能.

定义 2.42 (标准正态分布)

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称 Z 服从标准正态分布, 记作 $Z \sim N(0, 1)$. 其密度与分布函数记为

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = P(Z \leq z).$$

定理 2.43 (正态标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

因此

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

注: 正态标准化的分布函数证明属于 C 级: 本阶段不要求复现换元积分的完整细节, 只需掌握“减均值、除标准差”, 并记住参数写的是 σ^2 、标准化分母写的是 σ .

由标准正态密度的对称性,

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a), \quad \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

且对 $a > 0$,

$$P(|Z| \leq a) = 2\Phi(a) - 1.$$

例题 2.44 (只用对称性, 不必标准化)

若 $X \sim N(2, \sigma^2)$ 且 $P(2 < X < 4) = 0.3$, 则区间 $(0, 2)$ 与 $(2, 4)$ 关于 $\mu = 2$ 对称, 所以

$$P(0 < X < 2) = 0.3.$$

同理, 若 $P(X \leq 4) = 0.5$, 则正态密度的对称轴必须为 4, 故 $\mu = 4$.

例题 2.45 (一次函数仍服从正态)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2), \quad a \neq 0.$$

例如 $X \sim N(1, 1)$ 时, 要使 $X + C \sim N(0, 1)$, 必须取 $C = -1$.

例题 2.46 (公交车门高度)

成年男子身高 $X \sim N(165, 36)$ (单位: 厘米). 若车门碰头率不超过 1%, 且已知 $\Phi(2.33) = 0.99$, 求车门高度的最低设计值.

设车门高度为 h . 碰头率不超过 1% 等价于

$$P(X \leq h) \geq 0.99.$$

标准化:

$$\Phi\left(\frac{h - 165}{6}\right) \geq \Phi(2.33).$$

由于 Φ 严格递增,

$$\frac{h - 165}{6} \geq 2.33, \quad h \geq 178.98.$$

实际设计可取 179 厘米. 检查: 这里的 36 是方差, 所以标准差为 6.

例题 2.47 (由中心区间概率比较标准差)

设

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

且

$$P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1).$$

标准化后

$$2\Phi(1/\sigma_1) - 1 > 2\Phi(1/\sigma_2) - 1.$$

因 Φ 严格递增, 得 $\sigma_1 < \sigma_2$. 标准差越小, 分布越集中.

例题 2.48 (从二次指数识别正态分布)

已知某密度在全实轴上形如

$$f_X(x) = A \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right).$$

识别 X 的正态参数, 并求

$$P(-2\sqrt{2} + 2 < X < 2\sqrt{2} + 2)$$

(用 Φ 表示).

先配方:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = -\frac{(x-2)^2}{4} + 1.$$

与

$$-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

比较, 得 $\mu = 2$, $\sigma^2 = 2$. 因此

$$\frac{X-2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1),$$

$$P(-2\sqrt{2} + 2 < X < 2\sqrt{2} + 2) = P(-2 < Z < 2) = 2\Phi(2) - 1.$$

题目若不要求 A , 无需先计算归一化常数.

小结

均匀分布按区间长度计算, 指数分布用尾概率 $e^{-\lambda a}$ 并具有无记忆性, 正态分布先找对称轴, 再决定是否标准化. 使用时必须核对参数口径: 均匀分布看区间端点, 指数分布区分速率 λ 与尺度 θ , 正态分布区分方差 σ^2 与标准差 σ .

2.5 随机变量函数的分布

2.5.1 离散型: 合并产生同一函数值的概率

若离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X = x_k) = p_k$, 令 $Y = g(X)$, 则:

1. 先计算所有 $g(x_k)$, 去掉重复值, 得到 Y 的全部可能取值;
2. 对每个 y , 把所有满足 $g(x_k) = y$ 的概率相加:

$$P(Y = y) = \sum_{k: g(x_k)=y} p_k.$$

例题 2.49 (离散型函数的分布)

已知

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

令 $Y = X^2$, 求 Y 的分布律.

由 $Y = X^2$, 可能取值为 0, 1, 4. 其中 $X = -1$ 与 $X = 1$ 都映射到 $Y = 1$, 所以

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{3},$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12},$$

$$P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

检查: 三项概率之和为 1. 易错点是只取 $X = 1$ 而漏掉 $X = -1$.

2.5.2 连续型: 分布函数法

定理 2.50 (一维随机变量函数的分布函数法)

设连续型随机变量 X 的分布已知, $Y = g(X)$. 对任意实数 y ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

把不等式 $g(X) \leq y$ 化为关于 X 的取值集合, 再用 X 的分布函数或密度计算, 即可得到 F_Y ; 若 F_Y 在相应区间可导, 再由

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

求密度.

注: 分布函数法是通法, 尤其适合 g 非单调、多对一或含绝对值的情形. 固定流程为:

先定 Y 的范围 $\longrightarrow$ 写 $P(g(X) \leq y)$ $\longrightarrow$ 化成 X 的范围 $\longrightarrow$ 求概率并求导.

若 g 在 X 的支持区间上严格单调且可导, 也可使用反函数密度公式, 但本章优先掌握不易漏解的分布函数法.

例题 2.51 (单调线性变换)

设

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad Y = 2X + 8.$$

求 Y 的密度.

推导目标: 用分布函数法求 Y 的分布.

出发点: $X \in (0, 4)$, 故 $Y \in (8, 16)$.

关键转换: 对中间区间 $8 \leq y < 16$,

$$\{Y \leq y\} = \{2X + 8 \leq y\} = \left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\}.$$

正式推导:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 8, \\ \int_0^{(y-8)/2} \frac{x}{8} dx = \frac{(y-8)^2}{64}, & 8 \leq y < 16, \\ 1, & y \geq 16. \end{cases}$$

于是

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

推导小结: 先确定 Y 的支持集可以直接写出 0 与 1 两段, 也可防止求导后漏写密度的取值范围.

例题 2.52 (绝对值变换: 两侧概率要相加)

设

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

令 $Y = |X|$. 求 Y 的密度.

因为 $Y \geq 0$,

$$F_Y(y) = 0, \quad y < 0.$$

当 $y \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \\ &= \int_{-y}^y \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 1 - e^{-y}. \end{aligned}$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

结果是参数为 1 的指数分布. 检查: 密度非负且在 $(0, \infty)$ 上积分为 1.

例题 2.53 (均匀分布经过绝对值变换)

设 $X \sim U(-1, 2)$, 令 $Y = |X|$, 求 Y 的密度.

先画 $y = |x|$ 在 $x \in [-1, 2]$ 上的图像, 可见 $Y \in [0, 2]$. 水平线在 $0 < y < 1$ 时与左右两支相交, 在 $1 < y < 2$ 时只与右支相交, 因此必须以 $y = 1$ 分段.

当 $0 \leq y < 1$ 时,

$$F_Y(y) = P(-y \leq X \leq y) = \frac{2y}{3}.$$

当 $1 \leq y < 2$ 时, 左端已超出 X 的支持集,

$$F_Y(y) = P(-1 \leq X \leq y) = \frac{y+1}{3}.$$

故

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{2y}{3}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{y+1}{3}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{3}, & 1 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

关键转折: 非单调变换可能使不同的 x 映射到同一个 y , 且交点个数变化的位置就是新的分段点.

例题 2.54 (正态绝对偏差)

若 $X \sim N(1, 4)$, 令 $Y = |X - 1|$. 当 $y \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(|X - 1| \leq y) \\ &= P\left(\left|\frac{X - 1}{2}\right| \leq \frac{y}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{y}{2}\right) - 1. \end{aligned}$$

因此

$$f_Y(y) = \begin{cases} \varphi(y/2), & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

这里利用的是正态标准化, 而不是直接积分正态密度.

2.5.3 概率积分变换

定理 2.55 (概率积分变换)

若连续型随机变量 X 的分布函数 F_X 在其有效取值区间上严格递增, 则

$$Y = F_X(X) \sim U(0, 1).$$

注: 证明思路 (B 级): 当 $0 < y < 1$ 时, 利用严格递增性和反函数,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(F_X(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

再补上 $y < 0$ 时为 0、 $y \geq 1$ 时为 1, 即得到 $U(0, 1)$ 的分布函数. 若 F_X 不严格递增, 可用广义逆作更一般的表述; 本阶段不要求展开.

注: 考研专项: 概率积分变换的用途. 它把一般连续分布转成均匀分布, 是随机模拟和蒙特卡洛方法的基础之一. 基础阶段会识别并使用结论即可.

小结

离散型函数分布通过“代入取值、合并同像概率”得到; 连续型函数分布优先使用分布函数法. 使用时先确定 Y 的支持集, 再把 $Y \leq y$ 转为关于 X 的事件. 函数非单调时必须检查一个 y 对应几个 x , 交点个数发生变化的位置就是分段点.

2.6 本章总结

2.6.1 知识结构

$$\begin{aligned}
 &\text{随机变量 } X \longrightarrow F_X(x) = P(X \leq x) \\
 &\longrightarrow \begin{cases} \text{离散型: } P(X = x_k) = p_k, & F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k, \\ \text{连续型: } F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \end{cases} \\
 &\longrightarrow Y = g(X) \text{ 的分布.}
 \end{aligned}$$

2.6.2 核心公式与适用条件

公式	内容	使用前检查
区间概率	$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$	端点开闭、左极限
离散型概率	$P(X \in A) = \sum_{x_k \in A} p_k$	取值是否列全
连续型概率	$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$	密度与支持集
二项分布	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	固定次数、独立、概率不变
几何分布	$(1-p)^{k-1} p$	首次成功、第 k 次停止
泊松分布	$\lambda^k e^{-\lambda} / k!$	$k = 0, 1, \dots$
超几何分布	$\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$	无放回、取值上下界
指数尾概率	$P(X > a) = e^{-\lambda a}$	$X \sim E(\lambda), a > 0$
正态标准化	$(X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$	分母是标准差 σ
函数分布	$F_Y(y) = P(g(X) \leq y)$	先求 Y 的支持集

2.6.3 常见题型与方法选择

- 判断函数是否合法:** 分布函数查单调不减、右连续、两端极限; 分布律查非负与求和为 1; 密度查非负与积分为 1.
- 由分布函数算概率:** 把目标区间写成两个左侧事件之差, 离散情形保留左极限.
- 离散型求分布律:** 先列全部取值, 再逐个求概率; 复杂的最后一项可用总概率为 1 补出.

4. **识别常见分布:** 先读试验结构, 不要只凭公式外形; 特别区分二项、几何和超几何.
5. **连续型综合题:** 归一化求参数, 再按支持集积分; 分布函数先写支持集外的 0、1 两段.
6. **正态题:** 先看对称性能否直接解决, 再标准化; 看到方差参数先开方得到标准差.
7. **随机变量函数:** 离散型合并同像概率; 连续型用分布函数法, 非单调时画 $y = g(x)$ 并找分段点.

2.6.4 重点辨析

概念	本质区别	常见误判
分布函数与密度	F_X 是累计概率, f_X 是概率集中程度	把 $f_X(a)$ 当作 $P(X = a)$
离散与连续	前者对取值求和, 后者对区间积分	看到“随机”就默认等可能
互斥与独立	互斥是不同时发生, 独立是不影响概率	把互斥事件当作独立事件
二项与超几何	二项要求概率不变, 超几何是无放回	无放回仍直接套二项
几何与二项	几何统计首次成功所需次数, 二项统计固定次数内成功数	忽略“直到”“为止”
方差与标准差	正态记号写 σ^2 , 标准化除以 σ	直接除以题中的方差数字
点概率为零与不可能	连续型单点概率为零, 但单点可作为结果出现	由 $P(A) = 0$ 推出 $A = \emptyset$

2.6.5 易错点

1. 分布函数定义域是整个实数轴, 不能只写随机变量的支持区间.
2. 分布函数右连续; 离散型跳跃点处等号应放在右侧一段.
3. 分布律和密度都要先写取值范围或支持集, 不能只写公式主体.
4. 泊松近似不能擅自代替精确二项概率.
5. 密度在个别点处的值不影响分布, 但整个区间上的密度不能随意改.
6. 连续型区间端点可忽略, 离散型端点通常不可忽略.
7. 求 $Y = g(X)$ 时, 不能默认 g 单调; 例如平方和绝对值会合并两侧概率.

2.6.6 证明掌握清单

- **A 级:** 会完整验证分布函数、分布律和密度; 会由密度推出分布函数和区间概率; 会处理分布函数跳跃点; 会用分布函数法推导 $Y = g(X)$ 的分布; 会证明指数分布无记忆性.
- **B 级:** 会解释二项、几何、泊松等公式的试验背景; 理解泊松近似的条件与限制; 能说明连续型单点概率为零; 理解概率积分变换的证明骨架.
- **C 级:** 泊松定理严格极限证明、正态标准化的完整积分证明、分布函数左极限的严格分析证明, 以及常见分布归一化的重复代数推导, 本阶段不要求复现.

2.6.7 自测题

练习 2.56 (分布函数与跳跃)

设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

确定 c 的允许范围, 并写出 $P(X = 0)$ 、 $P(X = 2)$ 与 $P(0 < X < 2)$.

练习 2.57 (分布选择)

分别判断下列随机变量更适合二项、几何、泊松还是超几何分布, 并说明条件:

1. 独立检查 20 件产品中的次品数;
2. 无放回抽取 5 件产品中的次品数;
3. 直到第一次出现次品所检查的件数;
4. 一小时内到达服务台的人数.

练习 2.58 (密度与分布函数)

设

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 k 、分布函数 F 、 $P(X > 1)$, 并验证所得 F 满足分布函数条件.

练习 2.59 (正态标准化)

设 $X \sim N(10, 4)$, 用 Φ 表示

$$P(8 < X < 13), \quad P(|X - 10| \leq 3).$$

练习 2.60 (随机变量函数)

设 $X \sim U(-2, 1)$, 令 $Y = X^2$. 先画 $y = x^2$ 在支持区间上的图像, 再求 Y 的分布函数和密度. 检查分段点为何不是只有 0.

注: [本章自检] 完成本章后, 应能回答:

1. 为什么分布函数能表示随机变量的全部概率信息?
2. 如何从题目语言判断该求和还是积分?
3. 五种离散分布和三种连续分布各自的参数、支持集与典型背景是什么?
4. 为什么连续型单点概率为零, 却不能简单理解成“绝不可能取到”?
5. 面对 $Y = g(X)$, 为什么分布函数法比死背变换公式更稳妥?