

第三章 多维随机变量及其分布

本章导读

第二章只用一个数描述一次试验结果, 但现实问题常由多个指标共同决定. 例如一件产品同时有长度和重量, 一名学生同时有数学和英语成绩. 若只研究其中一个指标, 就会丢失它们如何共同变化的信息. 本章把同一次试验产生的多个随机变量放在一起, 研究它们的**联合分布**、各自的**边缘分布**、已知一个变量后的**条件分布**以及变量之间的**独立性**.

本章的计算主线只有两条:

离散型: 对符合条件的格点概率求和, 连续型: 在符合条件的平面区域上积分.

最后再把 (X, Y) 通过 $Z = g(X, Y)$ 压缩成一个新随机变量. 学习时始终先问: **取值区域是什么?**
目标事件在图上是哪一块?

3.1 二维随机变量与联合分布函数

3.1.1 为什么需要二维随机变量

定义 3.1 (二维随机变量)

在同一个随机试验的样本空间 Ω 上定义两个随机变量 $X = X(\omega)$ 与 $Y = Y(\omega)$, 把它们作为一个整体

$$(X, Y) = (X(\omega), Y(\omega)),$$

称为二维随机变量或随机向量. 一次试验结果 ω 会同时确定平面上的一个随机点 (X, Y) .

注: [“同一个样本空间”是关键] 二维随机变量不是把两个毫无关系的数机械并排, 而是同一次随机试验的两个观测指标. 可以分别研究 X 、 Y , 也可以研究它们同时落入某区域的概率. 推广到 n 个指标, 就得到 n 维随机变量 $(X_1, \dots, X_n)$.

3.1.2 联合分布函数与矩形概率

定义 3.2 (联合分布函数)

二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数定义为

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

几何上, $F(x, y)$ 是随机点落在点 (x, y) 左下方无界矩形中的概率.

定理 3.3 (由联合分布函数求矩形概率)

若 $x_1 < x_2$ 、 $y_1 < y_2$, 则

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

证明: 证明目标: 从联合分布函数中扣出半开矩形的概率.

出发点: 联合分布函数表示左下方无界矩形的概率.

关键转换: 先取大矩形, 再减去左条和下条; 二者重叠的左下角被减了两次, 需加回一次.

正式推导: 记 $A = \{X \leq x_2, Y \leq y_2\}$, 则利用容斥关系,

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= P(A) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) \\ &\quad - P(X \leq x_2, Y \leq y_1) + P(X \leq x_1, Y \leq y_1) \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

证明小结: 真正起作用的是矩形的包含关系和容斥原理. 四项符号可记为“右上减左上、减右下、加左下”。

定理 3.4 (联合分布函数的基本性质)

任意联合分布函数 F 满足:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
2. 对每个变量分别单调不减, 并分别右连续;
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$;
4. 对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 矩形增量

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

最后一条称为二重单调性; 仅分别单调还不够.

例题 3.5 (分别单调不等于合法联合分布函数)

判断某个二元函数是否能作联合分布函数时, 即使它取值在 $[0, 1]$ 、分别单调且满足端点极限, 也必须检查任意矩形增量非负. 若能找到一个矩形使四项差为负, 就等于得到一个“负概率”, 该函数立即被排除.

方法选择: 这类题不必尝试还原随机变量, 只需逐条检查充要条件.

3.1.3 边缘分布函数与独立性

定义 3.6 (边缘分布函数)

忽略另一个变量后, X 与 Y 的分布函数称为边缘分布函数:

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \quad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

“边缘”就是高维分布中某个低维分量自己的分布.

定义 3.7 (随机变量的独立性)

若对任意实数 x, y 都有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称 X 与 Y 相互独立.

例题 3.8 (由联合分布函数求边缘并判断独立)

设

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-\lambda y}), & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

求边缘分布函数并判断 X, Y 是否独立.

令另一个变量趋于 $+\infty$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

对所有 x, y , 原联合分布函数正好等于 $F_X(x)F_Y(y)$, 故 X, Y 独立.

检查: 两个边缘分别是参数为 1 和 λ 的指数分布; 联合分布中的乘积结构与独立性一致.

小结

本节把一次试验的两个指标组成随机点 (X, Y) . 联合分布函数记录左下方矩形概率; 求有限矩形概率用四项容斥; 求边缘时让另一个变量趋于 $+\infty$; 判断独立必须检查联合分布能否分解为两个边缘分布的乘积. 使用前先确认端点开闭和矩形增量非负.

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 联合分布律、边缘与条件分布

定义 3.9 (二维离散型联合分布律)

若 (X, Y) 只能取有限对或可列多对值 (x_i, y_j) , 记

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),$$

则 $\{p_{ij}\}$ 称为联合分布律, 且

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

离散型问题的统一动作是: 列出满足目标条件的所有格点, 再把这些格点的概率相加.

定理 3.10 (由联合分布律得到边缘分布律)

若 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, 则

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}.$$

证明: 证明目标: 由联合概率推出每个分量自己的概率.

出发点: 固定 $X = x_i$ 后, Y 必取某个 y_j , 这些事件两两互斥.

关键转换: 把边缘事件按另一个变量的全部可能取值分割.

正式推导:

$$\{X = x_i\} = \bigcup_j \{X = x_i, Y = y_j\},$$

且右侧事件互斥, 所以

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij}.$$

同理, $P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$.

证明小结: “求谁的边缘, 就固定谁, 把另一个变量的所有情况加完”. 这是全概率思想在表格中的直接应用. ■

定义 3.11 (离散型条件分布律)

若 $p_{\cdot j} = P(Y = y_j) > 0$, 则

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.$$

若 $p_{i\cdot} > 0$, 则

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}.$$

分母为零时, 该条件分布没有定义.

证明: 证明目标: 由联合分布和边缘分布构造条件分布, 并验证它是合法分布.

出发点: 条件概率公式 $P(A | B) = P(AB)/P(B)$, 要求 $P(B) > 0$.

关键转换: 令 $A = \{X = x_i\}$, $B = \{Y = y_j\}$.

正式推导:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.$$

各项非负, 且

$$\sum_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{\sum_i p_{ij}}{p_{\cdot j}} = 1.$$

证明小结: 条件分布就是把表格中固定的一行或一列重新归一化. 先查分母是否正, 是不可省略的定义条件. ■

3.2.2 离散型独立性

定理 3.12 (离散型独立判据)

二维离散型随机变量 X, Y 相互独立, 当且仅当对所有 i, j ,

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}.$$

只验证一两个格点不能证明独立; 找到一个反例格点即可否定独立.

证明: 证明目标: 把联合分布函数的独立性转化为表格中逐格相乘.

出发点: 独立事件满足联合概率等于边缘概率乘积.

关键转换: 对每个单点事件 $\{X = x_i\}$ 与 $\{Y = y_j\}$ 应用独立性.

正式推导: 若 X, Y 独立, 则

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}.$$

反之, 若逐格等式成立, 则任意集合 A, B 上

$$\begin{aligned} P(X \in A, Y \in B) &= \sum_{x_i \in A} \sum_{y_j \in B} p_{ij} \\ &= \left(\sum_{x_i \in A} p_{i\cdot} \right) \left(\sum_{y_j \in B} p_{\cdot j} \right) \\ &= P(X \in A)P(Y \in B), \end{aligned}$$

故 X, Y 独立.

证明小结: 逐格乘积不仅是必要条件, 也是充分条件; 原因是所有离散事件都能由格点概率求和得到. ■

例题 3.13 (抽球: 联合、边缘、条件与独立性)

盒中有 2 个黑球、2 个红球、2 个白球, 不放回随机取 2 球. 令 X 为黑球数, Y 为红球数.

总取法为 $\binom{6}{2} = 15$. $X, Y \in \{0, 1, 2\}$, 且 $X + Y \leq 2$. 联合分布律为

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
$X = 1$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	0
$X = 2$	$\frac{1}{15}$	0	0

例如

$$P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}.$$

X 的边缘分布律由逐行相加得到

$$P(X = 0) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{8}{15}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{15}.$$

条件概率

$$P(Y = 1 | X = 0) = \frac{4/15}{6/15} = \frac{2}{3}.$$

又因

$$P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{225},$$

所以 X, Y 不独立.

结果检查: 九个格点概率之和为 1; 不放回造成取值约束 $X + Y \leq 2$, 这也解释了独立性为何失败.

注: [表格题的固定顺序] 先列 X, Y 的全部可能取值, 再逐格翻译事件并计算联合概率; 随后才能安全地求范围概率、边缘、条件和独立性. 不要先凭直觉判断独立, 也不要漏写概率为零的不可可能格点.

小结

二维离散型分布由“取值对加联合概率”组成. 求边缘就是按行或列求和; 求条件分布是固定一行或一列后重新归一化; 判断独立需逐格比较联合概率与两个边缘概率的乘积. 做题前先行

全格点并检查总和为 1.

3.3 二维连续型随机变量

3.3.1 联合密度与区域概率

定义 3.14 (二维连续型随机变量与联合密度)

若存在非负可积函数 $f(x, y)$, 使联合分布函数可写成

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du,$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, f 为联合概率密度.

定理 3.15 (联合密度的充要条件与区域概率)

函数 f 能作为某个二维连续型随机变量的联合密度, 当且仅当

$$f(x, y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1.$$

对平面区域 G ,

$$P((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy.$$

在连续点处, $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

注: [二维连续型题的总口诀] “在哪个区域求概率, 就在哪个区域对联合密度积分.” 概率论的关键任务是画对联合密度支持集与目标事件区域的交集; 之后的积分次序可以按区域形状选择.

例题 3.16 (归一化、区域概率与联合分布函数)

设

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 C 、 $P(X + Y < 1)$ 及联合分布函数在 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 时的表达式.

先由归一性确定参数:

$$1 = C \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy = \frac{C}{4}, \quad C = 4.$$

事件 $X + Y < 1$ 是单位正方形中的下三角形, 因此

$$P(X + Y < 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy \, dy \, dx = \frac{1}{6}.$$

当 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 时, 左下矩形完全位于支持集内, 故

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4uv \, dv \, du = x^2 y^2.$$

完整分布函数还需按 $x \leq 0$ 、 $0 < x < 1$ 、 $x \geq 1$ 与 y 的三段组合讨论.

检查: 由 $f(x, y) = 4xy = (2x)(2y)$ 可预见 X, Y 独立, 且边缘分布函数均为区间内的平方函数.

3.3.2 边缘概率密度

定理 3.17 (由联合密度求边缘密度)

若 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx.$$

证明: 证明目标: 从联合密度推出单个分量的密度.

出发点: $F_X(x) = F(x, +\infty)$, 密度是分布函数的导数.

关键转换: 让 Y 遍历全部可能取值, 再对 x 求导.

正式推导:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) dy \right] du.$$

在可求导处,

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

f_Y 同理.

证明小结: 边缘化的本质与离散型完全相同: 把另一个变量的全部可能性“加掉”; 离散用求和, 连续用积分. ■

例题 3.18 (三角形支持集上的边缘密度)

设

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 k 及两个边缘密度.

支持集是 $0 \leq x \leq y \leq 1$. 归一化得

$$1 = k \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx = \frac{k}{8}, \quad k = 8.$$

固定 x 后, y 从 x 到 1:

$$f_X(x) = \int_x^1 8xy dy = 4x(1 - x^2), \quad 0 < x < 1.$$

固定 y 后, x 从 0 到 y :

$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy dx = 4y^3, \quad 0 < y < 1.$$

区间外均为 0.

关键转折: 积分限不是背出来的, 而是固定一个坐标后, 从三角形中读出另一个坐标的范围.

3.3.3 条件概率密度与条件概率

定义 3.19 (条件概率密度)

在 $f_Y(y) > 0$ 时, 给定 $Y = y$ 条件下 X 的条件密度为

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

在 $f_X(x) > 0$ 时,

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

注: [为什么不能直接套普通条件概率] 连续型随机变量通常满足 $P(Y = y) = 0$, 所以不能把 $P(X \leq x, Y = y)/P(Y = y)$ 当作普通比值. 条件密度可理解为让 Y 落在 $[y, y + h]$ 后令 $h \rightarrow 0$ 得到的极限; 这是 B 级证明, 只需掌握“小区间条件化后归一化”的骨架.

证明: **证明目标:** 验证由联合密度与边缘密度构造出的条件密度是合法的一维密度.

出发点: 假设 $f_Y(y) > 0$, 且 $f(x, y) \geq 0$.

关键转换: 固定 y , 只对 x 积分.

正式推导:

$$f_{X|Y}(x | y) \geq 0,$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x | y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}{f_Y(y)} = 1.$$

证明小结: 条件密度是固定切片后除以该切片的总质量; 分母必须为正. 若分母为零, 公式没有定义. ■

例题 3.20 (“等号条件”与“区间条件”选择不同方法)

若题目问 $P(Y \leq b | X = x_0)$, 先求 $f_{Y|X}(y | x_0)$, 再在 $(-\infty, b]$ 上积分. 若题目问 $P(Y \leq b | X > a)$, 条件事件有正概率, 直接用

$$\frac{P(Y \leq b, X > a)}{P(X > a)}$$

更直接, 不必构造条件密度.

3.3.4 连续型独立性

定理 3.21 (连续型独立判据)

二维连续型随机变量 X, Y 相互独立, 当且仅当

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

在平面上几乎处处成立.

证明: **证明目标:** 用联合密度是否分解为边缘密度乘积判断独立.

出发点: 独立的定义是 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

关键转换: 对联合分布函数分别求偏导; 反向则积分恢复分布函数.

正式推导: 若 X, Y 独立, 在可求导处

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F_X(x)F_Y(y)] = f_X(x)f_Y(y).$$

反之, 若密度几乎处处分解, 则

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u)f_Y(v) \, dv \, du \\ &= F_X(x)F_Y(y), \end{aligned}$$

故 X, Y 独立.

证明小结: 除了代数因式分解, 还必须检查支持集是否能写成两个一维支持集的直积. 三角形或圆盘支持集通常已经否定独立. ■

注: [三种“看起来能拆”的误判]

1. 只看公式主体能拆, 忽略支持集不能拆;
2. 只在支持集内部验证乘积相等, 忽略外部;
3. 看到 $P(A \cap B)$ 就擅自写成 $P(A)P(B)$, 尚未证明独立.

小结

二维连续型概率由联合密度在平面区域上的二重积分得到. 求边缘是把另一个变量积掉; 求条件密度是联合除以相应边缘, 并先检查分母为正; 判断独立要同时检查密度乘积和支持集结构. 计算前先画支持集, 再决定积分限.

3.4 二维均匀分布与二维正态分布

3.4.1 二维均匀分布

定义 3.22 (二维均匀分布)

设 D 是面积为 S_D 的有界平面区域. 若

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 D 上服从二维均匀分布.

对任意子区域 G ,

$$P((X, Y) \in G) = \frac{S_{G \cap D}}{S_D}.$$

面积比只适用于均匀分布; 一般联合密度仍须积分.

例题 3.23 (正方形与圆盘: 边缘和独立性的区别)

若 (X, Y) 在矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上均匀, 则 $X \sim U(a, b)$ 、 $Y \sim U(c, d)$, 且联合密度能分解, 故 X, Y 独立.

若 (X, Y) 在圆盘 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上均匀, 虽然图形对称, 但支持集不是两个区间的直积, X, Y 不独立; 其边缘密度也不是均匀密度. **对称不等于独立.**

3.4.2 二维正态分布

定义 3.24 (二维正态分布)

若联合密度为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ 、 $|\rho| < 1$, 则记

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho).$$

定理 3.25 (二维正态分布的常用性质)

若 (X, Y) 服从上述二维正态分布, 则:

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
2. X, Y 独立当且仅当 $\rho = 0$;
3. 任意非零线性组合 $aX + bY$ 仍服从正态分布;
4. 条件分布仍为正态分布.

本阶段将这些结论作为 C 级结论使用, 不要求复现完整解析证明.

注: [边缘正态不保证联合正态] X, Y 各自服从正态分布, 并不能推出 (X, Y) 联合正态, 也不能推出 $X + Y$ 正态. 例如令 $Y = -X$, 二者边缘均可为标准正态, 但 $X + Y \equiv 0$. 若再给出 X, Y 独立, 则联合分布为二维正态, 线性组合才可直接套正态结论.

例题 3.26 (独立正态变量的装配问题)

木塞直径 $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 瓶口直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, 且 X, Y 独立. 求木塞能装入瓶口的概率, 已知 $\Phi(2) = 0.9772$.

能装入的事件是 $X < Y$, 即 $X - Y < 0$. 独立正态的线性组合仍正态:

$$X - Y \sim N(22.40 - 22.50, 0.03^2 + 0.04^2) = N(-0.10, 0.05^2).$$

因此

$$P(X < Y) = P\left(\frac{X - Y + 0.10}{0.05} < 2\right) = \Phi(2) = 0.9772.$$

方法选择: 直接把二维事件化为一个正态线性组合, 比写二维积分简单得多.

小结

二维均匀分布把概率化为面积比, 但只能在密度恒定的支持集内使用; 矩形均匀分布的两个分量独立, 圆盘均匀分布通常不独立. 二维正态的边缘仍正态, 且只有在二维正态前提下, $\rho = 0$ 才与独立等价. 遇到独立正态的线性组合, 优先降成一维正态问题.

3.5 二维随机变量函数的分布

3.5.1 离散型: 合并产生同一函数值的概率

若 (X, Y) 为离散型, $Z = g(X, Y)$ 的分布律按两步得到: 先列出所有可能的 z , 再将所有满足 $g(x_i, y_j) = z$ 的格点概率相加:

$$P(Z = z) = \sum_{(i,j): g(x_i, y_j) = z} p_{ij}.$$

例题 3.27 (离散型和与最小值)

设联合分布律为

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
$X = 1$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	0

求 $U = X + Y$ 与 $V = \min(X, Y)$ 的分布律.

U 的可能取值为 $-1, 0, 1, 2$. 逐条合并同一函数值:

u	-1	0	1	2
$P(U = u)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	0

其中 $P(U = 0) = P(0, 0) + P(1, -1) = 6/16$, 其余同理.

V 的可能取值为 $-1, 0, 1$:

$$P(V = -1) = \frac{5}{16}, \quad P(V = 0) = \frac{11}{16}, \quad P(V = 1) = 0.$$

检查: 每张新分布表的概率之和都应为 1; 不能只代入格点而忘记合并重复函数值.

3.5.2 连续型通法: 分布函数法

定理 3.28 (二维随机变量函数的分布函数法)

设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, $Z = g(X, Y)$. 则

$$F_Z(z) = P(g(X, Y) \leq z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy,$$

积分区域还必须与联合密度的支持集取交集. 若 F_Z 可导, 则 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

证明: 证明目标: 由 (X, Y) 的联合密度求 $Z = g(X, Y)$ 的分布.

出发点: 分布函数定义 $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ 与区域概率公式.

关键转换: 把一维事件 $\{Z \leq z\}$ 翻译成平面事件 $\{g(X, Y) \leq z\}$.

正式推导:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(g(X, Y) \leq z) \\ &= \iint_{\{(x, y): g(x, y) \leq z\}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

若该分布函数在相应区间可导, 再求导得到密度.

证明小结: 分布函数法是通法. 最难的一步不是求导, 而是让曲线 $g(x, y) = z$ 在支持集上移动, 判断交集形状何时改变. ■

注: [分布函数法的固定流程]

1. 先由支持集估计 Z 的取值范围;
2. 写 $F_Z(z) = P(g(X, Y) \leq z)$;
3. 画支持集和边界曲线 $g(x, y) = z$;
4. 按交点变化处分段积分;
5. 求导后补写支持集外密度为 0, 并检查总积分为 1.

3.5.3 和的密度与卷积

定理 3.29 (和的密度公式)

设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, $Z = X + Y$, 则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx.$$

若 X, Y 独立, 则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) \mathrm{d}x,$$

称为卷积公式.

证明: 证明目标: 从联合密度推导 $Z = X + Y$ 的密度.

出发点: 分布函数法与变上限积分求导.

关键转换: 事件 $X + Y \leq z$ 等价于 $y \leq z - x$.

正式推导:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

对 z 求导得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \mathrm{d}x.$$

独立时代入 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 即得卷积公式.

证明小结: 卷积的积分限表面上是全实轴, 真正有效的范围由 x 同时满足 $f_X(x) \neq 0$ 与 $f_Y(z-x) \neq 0$ 决定; 这就是支持集交集的几何意义. ■

例题 3.30 (两个独立均匀变量之和)

设 X, Y 相互独立且均服从 $U(0, 1)$, 求 $Z = X + Y$ 的密度.

由卷积公式,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(0,1)}(z-x) \mathrm{d}x.$$

有效的 x 同时满足 $0 < x < 1$ 与 $z-1 < x < z$, 故积分区间长度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1, \\ 2-z, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

结果检查: 密度呈三角形、关于 $z = 1$ 对称, 总面积为 1; 这与 $Z \in (0, 2)$ 相符.

注: [其他变换公式的掌握层级] 对 $Z = aX + bY$ 、 $Z = Y/X$ 、 $Z = XY$ 可由变量变换得到带绝对值因子的积分公式. 一般多维变量变换的严格雅可比证明属于 C 级, 本阶段不要求复现; 遇到不熟悉的变换时, 优先使用分布函数法, 避免只背公式而漏掉支持集和绝对值.

3.5.4 正态线性组合

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 相互独立, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

正态线性组合应直接识别分布, 不必再做卷积或分布函数积分.

例题 3.31 (正态差的密度)

若 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 、 $Y \sim N(0, 2\sigma^2)$ 独立, 令 $Z = X - Y$, 则

$$Z \sim N(1, 3\sigma^2),$$

所以

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-1)^2}{6\sigma^2}\right].$$

小结

离散型函数分布靠“列新取值、合并同值格点”; 连续型通法是把 $Z \leq z$ 还原成平面区域后积分. 和的密度可用卷积, 但有效积分限仍由支持集决定; 正态独立线性组合直接写分布. 使用任何公式前先判断离散或连续、是否独立以及新变量的取值范围.

3.6 最大值、最小值与可加性

3.6.1 独立随机变量的最大值与最小值

定理 3.32 (最大值与最小值的分布)

设 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, 分布函数分别为 $F_1, \dots, F_n$. 令

$$M = \max(X_1, \dots, X_n), \quad L = \min(X_1, \dots, X_n).$$

则

$$F_M(z) = \prod_{i=1}^n F_i(z),$$

$$F_L(z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(z)].$$

若还同分布于 F , 则

$$F_M(z) = [F(z)]^n, \quad F_L(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

证明: 证明目标: 从分布函数定义推出最大值、最小值公式.

出发点: 独立事件的交集概率等于概率乘积.

关键转换: “最大值不超过 z ” 等价于所有变量都不超过 z ; “最小值不超过 z ” 先取补集更容易.

正式推导:

$$\begin{aligned} F_M(z) &= P(M \leq z) \\ &= P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq z) = \prod_{i=1}^n F_i(z). \end{aligned}$$

对最小值,

$$\begin{aligned} F_L(z) &= 1 - P(L > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z, \dots, X_n > z) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(z)]. \end{aligned}$$

证明小结: 最大值喜欢 “ $\leq$ ”, 最小值喜欢先转成 “ $>$ ”. 独立性是把交集概率拆成乘积的必要前提, 不能遗漏. ■

例题 3.33 (独立指数变量的最小值)

若 $X_i \sim E(\lambda_i)$ 相互独立, $L = \min(X_1, \dots, X_n)$, 则对 $z \geq 0$,

$$P(L > z) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i z} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)z}.$$

所以

$$L \sim E(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

它描述多个独立部件中 “第一个失效时间”.

3.6.2 常见可加性结论

在相互独立且参数条件匹配时, 有:

- $B(n_1, p) + B(n_2, p) \sim B(n_1 + n_2, p)$;
- $P(\lambda_1) + P(\lambda_2) \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$;
- 独立正态变量的线性组合仍为正态;
- 独立卡方变量之和的自由度相加;
- 独立指数变量的**最小值**仍为指数分布, 参数相加.

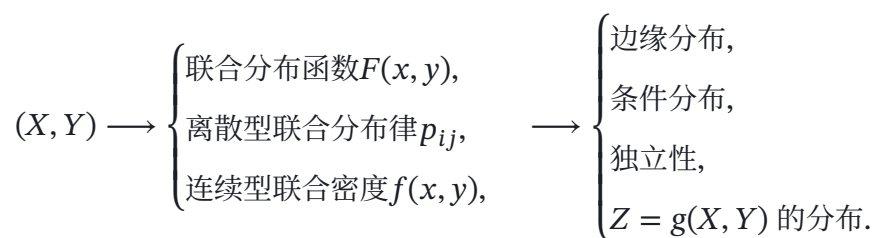
可加性必须连同独立性和“哪些参数必须相同”一起记, 不能只背分布名称.

小结

最大值分布直接研究“全部不超过”, 最小值分布先取补集研究“全部超过”; 只有相互独立时才能把联合事件拆成乘积. 常见分布的可加性还需核对参数条件, 例如二项分布必须有相同成功概率.

3.7 本章总结

3.7.1 知识结构



3.7.2 核心公式与适用条件

任务	公式	使用前检查
矩形概率	四项容斥	端点开闭
离散边缘	$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$	格点是否列全
连续边缘	$f_X(x) = \int f(x, y) dy$	支持集与积分限
条件密度	$f_{Y X} = f/f_X$	分母必须为正
独立判据	$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$ 或 $f = f_X f_Y$	对所有取值成立
函数分布	$F_Z(z) = P(g(X, Y) \leq z)$	新变量范围与分段点
卷积	$f_{X+Y}(z) = \int f_X(x) f_Y(z-x) dx$	独立性与有效积分区间
最大值	$F_M = \prod_i F_i$	相互独立
最小值	$F_L = 1 - \prod_i (1 - F_i)$	相互独立

3.7.3 常见题型与方法选择

1. **联合分布函数题:** 把事件画成左下矩形, 有限矩形用四项容斥.
2. **离散表格综合题:** 先列全格点, 再按“联合—边缘—条件—独立”顺序处理.
3. **连续区域概率:** 支持集与目标区域取交集, 在交集上二重积分.
4. **边缘与条件密度:** 先画切片范围; 条件密度用联合除边缘.
5. **独立性:** 先看支持集能否拆成直积, 再验证联合是否等于边缘乘积.
6. **函数分布:** 分布函数法是通法; 和可用卷积; 独立正态线性组合直接识别.
7. **极值分布:** 最大值用全部“ $\leq$ ”, 最小值转为全部“ $>$ ”.

3.7.4 重点辨析

概念	本质区别	常见误判
联合与边缘	联合保留共同变化, 边缘忽略另一变量	边缘相同就以为联合相同
互斥与独立	互斥是不同时发生, 独立是不影响概率	把不可能格点当成独立证据
等号条件与区间条件	前者用条件密度, 后者可用普通条件概率	用 $0/0$ 直接定义条件概率
均匀与独立	区域内密度恒定不保证支持集可拆	圆盘均匀也判断独立
不相关与独立	一般不等价; 二维正态中才有特殊等价	看到 $\rho = 0$ 就无条件说独立
卷积与通法	卷积适合和且常需独立, 分布函数法通用	不画支持集直接写全实轴积分

3.7.5 易错点

1. 联合分布函数的矩形增量符号写错, 或漏检二重单调性.
2. 求边缘时积分限机械写成常数, 没有随支持集切片变化.
3. 条件密度的分母选错, 或没有检查边缘密度是否大于零.
4. 仅凭联合密度主体可因式分解就判断独立, 忽略支持集.
5. 一般二维均匀分布擅用面积比以外的“独立”结论.
6. 只知道两个边缘正态, 就断言线性组合正态.
7. 求 $Z = g(X, Y)$ 时不先求取值范围, 导致漏段或积分限错误.
8. 最大值、最小值公式忘记相互独立前提.

3.7.6 证明掌握清单

- **A 级:** 会独立推导边缘分布、条件分布与独立判据; 会用分布函数法和卷积求函数分布; 会推导最大值、最小值公式.
- **B 级:** 理解条件密度来自小区间条件化; 理解卷积积分限的几何意义; 理解二维正态中独立与相关的特殊关系.
- **C 级:** 一般多维变量变换的严格雅可比证明, 以及二维正态性质的完整解析证明, 本阶段只要求准确使用结论.

3.7.7 自测题

练习 3.34 (离散型综合)

给出一个 2×3 联合分布表, 其中含未知参数 a . 请依次求 a 、两个边缘分布、 $P(X+Y \leq 1)$ 、一个有定义的条件分布, 并判断独立性.

练习 3.35 (三角形支持集)

设

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 c 、 f_X 、 f_Y 、 $f_{Y|X}$, 并判断 X, Y 是否独立.

练习 3.36 (函数分布)

设 X, Y 独立且均服从 $U(0, 1)$. 不用背结论, 分别用分布函数法求 $\max(X, Y)$ 与 $\min(X, Y)$ 的分布函数, 并解释为何两式结构不同.

练习 3.37 (卷积与检查)

设 X, Y 独立且都服从参数为 1 的指数分布. 用卷积求 $Z = X + Y$ 的密度, 再检查其非负性、支持集和归一性.

注: [本章自检] 完成本章后, 应能回答: 联合、边缘和条件分布分别保留什么信息? 为什么连续型条件 $X = x$ 不能直接套普通条件概率? 如何从支持集快速排除独立? 为什么分布函数法是函数分布的通法? 最大值与最小值公式中的独立性具体用在了哪一步?