

第五章 大数定律和中心极限定理

本章导读

前四章主要研究一个或少数随机变量. 本章把视角转向大量随机变量: 重复试验越来越多时, 随机性会不会显现出稳定规律?

本章的两个核心问题是:

1. **大数定律:** 大量观测的算术平均会稳定到哪里?
2. **中心极限定理:** 大量独立随机变量的和或平均值, 近似服从什么分布?

二者都研究“大量重复”, 但回答的问题不同:

大数定律: 稳定值

中心极限定理: 近似分布

本章依赖第四章的期望、方差、切比雪夫不等式和正态标准化; 下一章讨论样本统计量时, 会反复使用这里的结论.

5.1 依概率收敛

5.1.1 为什么需要一种新的收敛

普通数列 $x_n \rightarrow a$ 表示: 当 n 足够大时, x_n 必然落在 a 附近. 但随机变量 X_n 的取值具有随机性, 不能要求每次取值都落在附近. 我们能要求的是: n 越大, X_n 落在 a 附近的概率越接近 1.

定义 5.1 (依概率收敛)

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列, a 为常数. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1,$$

则称 X_n 依概率收敛于 a , 记为

$$X_n \xrightarrow{P} a.$$

等价地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0.$$

注: 定义中有三个不能漏掉的词: 任意 $\varepsilon > 0$ 、概率的**极限**、极限等于 1 或 0. 依概率收敛不表示从某一项起每次都落入邻域, 也不表示误差随 n 单调减小.

例题 5.2 (从定义识别依概率收敛)

设

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

证明 $X_n \xrightarrow{P} 0$.

任取 $\varepsilon > 0$. 当 $n > \varepsilon$ 时,

$$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

故 $X_n \xrightarrow{P} 0$.

结果检查: 虽然 X_n 偶尔会取很大的值 n , 但这种异常取值的概率只有 $1/n$, 最终趋于零. 这正体现了“允许偶尔偏离, 但偏离概率消失”.

5.1.2 连续函数下的运算性质

定理 5.3 (依概率收敛的连续映射性质)

若 $X_n \xrightarrow{P} a$, 且函数 g 在 a 处连续, 则

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a).$$

若 $X_n \xrightarrow{P} a$ 、 $Y_n \xrightarrow{P} b$, 且二元函数 g 在 (a, b) 处连续, 则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b).$$

常用特例包括

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b, \quad X_n Y_n \xrightarrow{P} ab,$$

以及当 $b \neq 0$ 时

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{a}{b}.$$

注: 使用函数结论前必须检查连续性. 例如倒数函数 $g(x) = 1/x$ 在 0 处不连续, 所以由 $X_n \xrightarrow{P} 0$ 不能直接推出 $1/X_n$ 的收敛结论.

小结

依概率收敛表示随机变量偏离目标常数至少 ε 的概率趋于零. 判断时固定从定义的两等价形式出发; 进行函数变换时, 还要检查函数在极限点是否连续. 后面所有大数定律的结论, 都是一种依概率收敛.

5.2 大数定律

5.2.1 共同主线: 算术平均稳定到期望

令

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

大数定律研究的典型结论是

$$\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} 0,$$

或在同分布情形下

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

直观上, 大量观测取平均会削弱个别异常值的影响, 使平均值稳定在总体期望附近.

5.2.2 切比雪夫大数定律

定理 5.4 (切比雪夫大数定律)

设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots$ 满足:

1. $X_1, X_2, \dots$ 两两不相关;
2. 各随机变量的期望和方差存在;
3. 方差一致有界, 即存在常数 $C > 0$, 使

$$D(X_i) \leq C, \quad i = 1, 2, \dots.$$

则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

即

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \xrightarrow{P} 0.$$

特别地, 若 $E(X_i) = \mu$, 则

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

注: [怎样由切比雪夫不等式得到大数定律] 这是本章需要理解的 B 级证明骨架. 令

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

两两不相关使和的方差可以相加, 因此

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

由切比雪夫不等式,

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

这恰好是 $Y_n - E(Y_n) \xrightarrow{P} 0$ 的定义.

真正起作用的链条是

$$\boxed{\text{两两不相关}} \implies \boxed{\text{平均值方差可相加}} \implies \boxed{D(Y_n) \rightarrow 0} \implies \boxed{\text{依概率收敛}}.$$

5.2.3 辛钦大数定律

定理 5.5 (辛钦大数定律)

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且

$$E|X_1| < \infty, \quad E(X_1) = \mu.$$

则

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

注: “期望存在”严格地说是 $E|X_1| < \infty$. 辛钦大数定律不要求方差存在, 因此适用于某些方差无穷但期望有限的分布. 其严格证明属于 C 级, **本阶段不要求复现**; 必须准确记住条件和结论, 并会逐项验证.

5.2.4 两种大数定律的辨析

比较项	切比雪夫大数定律	辛钦大数定律
变量关系	两两不相关即可	独立同分布
分布要求	可以不同分布	必须同分布
矩条件	方差存在且一致有界	只要求绝对一阶矩有限
结论	平均值减其期望依概率趋于零	平均值依概率趋于共同期望
证明要求	理解切比雪夫不等式推导	严格证明本阶段不要求复现

注: [方法选择] 若题目直接给出“独立同分布”且只需研究算术平均, 通常优先用辛钦大数定律, 因为只需检查期望存在. 若变量不同分布, 但能验证两两不相关且方差一致有界, 则使用切比雪夫大数定律.

5.2.5 伯努利大数定律与频率稳定性

定理 5.6 (伯努利大数定律)

在 n 次独立重复试验中, 事件 A 每次发生的概率为 p , 发生次数为 N_n . 则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{N_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

即

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

注: 伯努利大数定律把第一章“频率稳定于概率”的直观说法写成了严格的概率极限. 它不保证试验次数每增加一次, 频率就更接近 p ; 它保证偏离 p 超过固定误差的概率趋于零.

证明: **证明目标:** 说明事件频率依概率收敛于事件概率.

出发点: 把每次试验是否发生 A 写成 0-1 随机变量, 并使用辛钦大数定律.

关键转换: 令

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 发生,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不发生.} \end{cases}$$

则频率就是这些指示变量的算术平均.

正式推导: $I_1, I_2, \dots$ 独立同分布, 且

$$E(I_i) = p, \quad N_n = \sum_{i=1}^n I_i.$$

由辛钦大数定律,

$$\frac{N_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \xrightarrow{P} p.$$

证明小结: 频率稳定性本质上是 0-1 随机变量样本均值的稳定性. 可复用的方法是先把“次数”写成指示变量之和, 再调用大数定律. ■

5.2.6 用大数定律处理算术平均

例题 5.7 (平方的算术平均)

设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且均服从参数为 2 的指数分布. 求

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

的依概率极限.

方法选择: 研究的是 X_i^2 的算术平均, 所以应验证 X_i^2 , 而不是只验证 X_i 的条件.

因为 X_i 独立同分布, 所以 X_i^2 也独立同分布. 又由指数分布的数字特征,

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad D(X_i) = \frac{1}{4},$$

故

$$E(X_i^2) = D(X_i) + [E(X_i)]^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \infty.$$

由辛钦大数定律,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{2}.$$

关键转折: “求谁的算术平均, 就验证谁的条件”. 这里的基本变量是 X_i^2 .

例题 5.8 (由密度确定依概率极限)

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 密度为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

判断是否存在常数 a , 使

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} a,$$

若存在, 求 a .

仍然验证 X_i^2 . 它们独立同分布, 且

$$E(X_i^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot xe^{-x^2/2} dx.$$

令 $u = x^2/2$, 则 $x dx = du$, $x^2 = 2u$, 故

$$E(X_i^2) = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u} du = 2.$$

由辛钦大数定律,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} 2.$$

因此所求常数存在, 且 $a = 2$.

结果检查: 题目问“是否存在”, 不能只写数值; 必须先验证定律条件, 再明确回答存在性.

小结

大数定律研究算术平均的稳定性. 切比雪夫大数定律适合两两不相关、方差一致有界的序列; 辛钦大数定律适合独立同分布且绝对一阶矩有限的序列; 伯努利大数定律说明频率依概率收敛于概率. 做题时先识别被平均的变量, 再逐项验证相应条件.

5.3 独立同分布中心极限定理

5.3.1 从“稳定值”走向“近似分布”

大数定律告诉我们 $\bar{X}_n$ 会靠近 μ , 但没有描述它在 μ 附近怎样波动. 中心极限定理进一步回答: 经过适当中心化和标准化后, 这种波动的分布趋近标准正态分布.

比较项	大数定律	中心极限定理
主要对象	算术平均	和或算术平均的标准化形式
回答问题	最终稳定到哪个常数	最终近似哪种分布
典型结论	$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	标准化后分布趋近 $N(0, 1)$
主要用途	解释频率、样本均值的稳定性	近似计算大量求和或平均的概率

5.3.2 列维-林德伯格中心极限定理

定理 5.9 (独立同分布中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且

$$E(X_i) = \mu, \quad D(X_i) = \sigma^2 > 0.$$

记

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

则对任意实数 x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

是标准正态分布函数.

定理常写成近似形式: 当 n 足够大时,

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2),$$

或者

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

这里的 $\sim$ 表示“近似服从”, 不是精确分布相等.

注: [为什么要中心化和标准化] 和 S_n 的期望为 $n\mu$, 方差为 $n\sigma^2$. 减去 $n\mu$ 是把中心移到 0; 除以 $\sigma\sqrt{n}$ 是把方差缩放到 1. 于是不同 n 、不同量纲的问题都被转化为同一个标准正态分布.

中心极限定理的严格证明通常使用特征函数、矩母函数或高等分析工具, 属于 C 级, 本阶段不要求复现. 现阶段必须会准确检查条件、完成标准化并计算近似概率.

5.3.3 样本均值形式

由

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

可得

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \quad D(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

因此当 n 足够大时,

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

且

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

注: 若原变量本身服从正态分布, 则独立正态变量的和与平均值**精确**服从正态分布, 不需要“大样本近似”; 若原分布不是正态, 上述正态结论来自中心极限定理, 只是近似.

5.3.4 中心极限定理的解题流程

面对应用题, 可按以下固定顺序处理:

1. **识别对象:** 题目是否研究大量个体的和或平均值;
2. **设随机变量:** 对谁求和, 就把第 i 个个体对应的量设为 X_i ;
3. **检查条件:** 说明 X_i 独立同分布, 且期望、正方差存在;
4. **确定参数:** 求 S_n 或 $\bar{X}_n$ 的期望与方差;
5. **标准化:** 减期望、除标准差;
6. **查表计算:** 转化为 $\Phi(x)$, 并利用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

例题 5.10 (样本平均重量的近似概率)

某批棉花每包重量的期望为 100 kg, 标准差为 5 kg. 独立抽取 100 包, 求样本平均重量小于 99.5 kg 的近似概率. 已知 $\Phi(1) = 0.8413$.

设第 i 包棉花的重量为 X_i kg, $i = 1, 2, \dots, 100$. 则

$$E(X_i) = 100, \quad D(X_i) = 25.$$

由中心极限定理,

$$\bar{X} \sim N\left(100, \frac{25}{100}\right).$$

所以

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 99.5) &\approx P\left(\frac{\bar{X} - 100}{5/\sqrt{100}} < \frac{99.5 - 100}{0.5}\right) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587. \end{aligned}$$

方法选择: 题目研究 100 个独立重量的平均值, 且只给出总体期望和方差, 正是中心极限定理的使用场景.

结果检查: 阈值 99.5 比均值低一个“样本均值标准差”, 左尾概率应小于 0.5, 结果合理. 题目中的总体包数若不影响抽样模型, 就是干扰信息.

例题 5.11 (寿命总和的近似概率)

某种电子设备的寿命服从均值为 100 小时的指数分布. 随机抽取 16 台, 寿命相互独立. 求寿命总和超过 1920 小时的近似概率. 已知 $\Phi(0.8) = 0.7881$.

设第 i 台设备寿命为 X_i . 指数分布的标准差等于均值, 因此

$$E(X_i) = 100, \quad D(X_i) = 100^2.$$

令 $S_{16} = \sum_{i=1}^{16} X_i$. 由中心极限定理,

$$S_{16} \sim N(16 \times 100, 16 \times 100^2).$$

于是

$$\begin{aligned} P(S_{16} > 1920) &\approx P\left(\frac{S_{16} - 1600}{400} > \frac{1920 - 1600}{400}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.8) = 0.2119. \end{aligned}$$

近似性提醒: $n = 16$ 不算很大, 因此结果只是一种题设要求下的近似. 样本较小时, 中心极限定理的精度取决于原分布偏斜程度; 若题目能提供总和的精确分布, 应优先使用精确分布.

小结

独立同分布中心极限定理说明: 有限期望、正方差条件下, 大量随机变量之和经过“减 $n\mu$ 、除 $\sigma\sqrt{n}$ ”后趋近标准正态分布. 求平均值时相应地“减 μ 、除 $\sigma/\sqrt{n}$ ”. 应用中先识别大量求和或平均, 再设变量、验条件、定参数、标准化.

5.4 二项分布的正态近似

5.4.1 棣莫弗–拉普拉斯定理

二项随机变量本身就是 n 个独立 0-1 随机变量之和, 因此中心极限定理可直接给出它的正态近似.

定理 5.12 (棣莫弗–拉普拉斯定理)

设 $X_n \sim B(n, p)$, 其中 $0 < p < 1$ 固定. 则对任意实数 x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

因此当 n 足够大时,

$$X_n \sim N(np, np(1-p)).$$

注: 其严格证明属于 C 级, 本阶段不要求复现. 做题时应能解释: X_n 是 n 个独立同分布的伯努利变量之和, 所以它是独立同分布中心极限定理的特例.

5.4.2 什么时候使用正态近似

常用经验条件是

$$np \geq 5, \quad n(1-p) \geq 5.$$

这不是定理中的精确分界线, 而是判断二项分布是否过度偏斜的经验规则. 两个量都足够大时, 正态近似通常较合理.

近似方法	典型条件	近似分布
泊松近似	n 大、 p 小、 np 适中	$P(np)$
正态近似	np 与 $n(1-p)$ 都不小	$N(np, np(1-p))$

注: [连续性修正] 二项分布是离散型, 正态分布是连续型. 若课程要求提高近似精度, 可把整数边界向外移动 0.5:

$$P(X \geq k) \approx P(Y > k - 0.5), \quad P(X \leq k) \approx P(Y < k + 0.5),$$

其中 $Y \sim N(np, np(1-p))$. 若题目或课堂示例明确不采用连续性修正, 应按其口径计算, 并说明所用近似.

例题 5.13 (考试通过人数)

某公司有 200 名员工参加资格考试. 根据往年经验, 每人通过的概率为 0.8, 并假定各人是否通过相互独立. 求至少 150 人通过的近似概率. 已知

$$\Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = 0.9616.$$

设通过人数为 X , 则

$$X \sim B(200, 0.8),$$

且

$$E(X) = 160, \quad D(X) = 200 \times 0.8 \times 0.2 = 32.$$

因为 $np = 160$ 、 $n(1 - p) = 40$ 均大于 5, 可用正态近似. 按题目给出的查表值, 不作连续性修正:

$$\begin{aligned} P(X \geq 150) &\approx P\left(\frac{X - 160}{\sqrt{32}} \geq \frac{150 - 160}{\sqrt{32}}\right) \\ &= P\left(Z \geq -\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = 0.9616. \end{aligned}$$

关键转折: “至少通过人数”先识别为二项分布; 由于 n 大且成功、失败的期望次数都不小, 再改用正态近似.

连续性修正: 若按更精细的口径, 应把 $X \geq 150$ 的边界改为 149.5, 再标准化. 两种结果会略有差异, 作答时保持口径一致.

小结

棣莫弗-拉普拉斯定理把大样本二项分布近似为 $N(np, np(1 - p))$. 使用前确认二项模型, 并检查 np 与 $n(1 - p)$ 是否足够大; 随后减去 np 、除以 $\sqrt{np(1 - p)}$. 连续性修正用于改善离散分布到连续分布的近似精度.

5.5 本章总结

知识结构

本章可以按“先稳定、后波动”组织:

依概率收敛 $\longrightarrow$ 大数定律: 平均值的稳定性 $\longrightarrow$ 中心极限定理: 和或平均的近似分布.

其中大数定律包括切比雪夫、辛钦和伯努利三种常用形式; 中心极限定理包括一般独立同分布形式及其二项分布特例.

核心结论与使用条件

结论	核心形式	使用前检查
依概率收敛	$P(X_n - a \geq \varepsilon) \rightarrow 0$	对任意 $\varepsilon > 0$
切比雪夫大数定律	平均值减其期望 $\xrightarrow{P} 0$	两两不相关、方差存在且一致有界
辛钦大数定律	$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	独立同分布、 $E X_1 < \infty$
伯努利大数定律	$N_n/n \xrightarrow{P} p$	独立重复试验、成功概率固定
独立同分布中心极限定理	$(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ 近似 $N(0, 1)$	独立同分布、有限期望、正方差
棣莫弗-拉普拉斯	$(X - np)/\sqrt{np(1-p)}$ 近似 $N(0, 1)$	$X \sim B(n, p)$, n 足够大

方法选择

1. 看到依概率极限: 先判断是否为算术平均, 再验证大数定律条件.
2. 看到独立同分布平均: 优先尝试辛钦大数定律, 只需再检查被平均变量的期望存在.
3. 看到不同分布序列: 若两两不相关且方差一致有界, 使用切比雪夫大数定律.
4. 看到频率: 把发生次数写成指示变量之和, 调用伯努利大数定律.
5. 看到大量和或平均的概率: 设第 i 个个体为 X_i , 验中心极限定理条件并标准化.
6. 看到大样本二项分布: 检查 np 与 $n(1-p)$, 再用正态近似; 按课程口径决定是否连续性修正.

重点辨析

容易混淆的概念	正确理解	常见误判
依概率收敛与普 通收敛	偏离概率趋于零, 仍允许偶然偏 离	认为从某项起每次都接近极限
大数定律与中心 极限定理	前者给稳定值, 后者给近似分布	看到“大量”就随意套其中一个
切比雪夫与辛钦	前者弱化独立同分布, 后者弱化 方差要求	混记三个条件和两个条件
原变量与被平均 变量	平均 $g(X_i)$ 就验证 $g(X_i)$ 的条件	只验证 X_i , 不检查变换后的矩
精确正态与近似 正态	正态总体的线性组合精确正态; 一般总体靠中心极限定理近似	把近似号写成严格分布相等
标准差与方差	标准化必须除标准差	直接除以 $n\sigma^2$ 或 σ^2/n

易错点清单

- 依概率收敛定义漏写“对任意 $\varepsilon > 0$ ”;
- 把“偏离概率趋于零”写成“随机变量数值必然趋于零”;
- 使用大数定律时不验证独立性、同分布性或矩条件;
- 研究 X_i^2 、 $g(X_i)$ 的平均, 却只检查 X_i 的条件;
- 切比雪夫大数定律忘记方差一致有界;
- 中心极限定理把和的方差写成 $n^2\sigma^2$;
- 平均值标准化时把标准差写成 σ/n , 正确值应为 $\sigma/\sqrt{n}$;
- 把中心极限定理的正态近似当成精确分布;
- 二项分布正态近似时忘记 $np(1-p)$ 是方差, 标准化分母还要开平方;
- 左尾、右尾转换时误用 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

证明掌握清单

- **A 级:** 能准确写出切比雪夫大数定律、辛钦大数定律的条件与结论; 能验证条件并完成依概率收敛或中心极限定理计算.
- **B 级:** 能解释切比雪夫大数定律怎样由切比雪夫不等式推出; 能说明大数定律为何支持频率稳定性和用样本矩估计总体矩; 能解释中心化与标准化的作用.
- **C 级:** 知道辛钦大数定律、独立同分布中心极限定理和棣莫弗—拉普拉斯定理的严格证明结论与用途; 使用特征函数、矩母函数或高等分析的证明本阶段不要求复现.

自测题

练习 5.14

设

$$P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}.$$

从定义证明 $X_n \xrightarrow{P} 1$, 并判断能否由连续映射性质推出 $X_n^2 \xrightarrow{P} 1$.

练习 5.15

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $E(X_1) = 2, D(X_1) = 3$. 分别写出

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

的依概率极限, 以及其大样本近似正态分布. 说明两个结论分别来自哪个定理.

练习 5.16

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $E(X_1^4) < \infty$. 证明

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4 \xrightarrow{P} E(X_1^4),$$

并明确指出应验证哪个随机变量序列的条件.

练习 5.17

某商品单件重量的期望为 500 g, 标准差为 20 g. 独立抽取 100 件, 利用中心极限定理表示样本平均重量落在 496 g 到 504 g 之间的近似概率, 并把答案写成 Φ 的形式.

练习 5.18

设 $X \sim B(400, 0.02)$. 比较泊松近似与正态近似的适用条件, 并判断本题优先选择哪一种近似. 若改为 $X \sim B(400, 0.5)$, 结论如何变化?

注: [章末自测清单] 合上讲义后, 检查自己能否做到:

1. 用两种等价形式写出依概率收敛定义;
2. 不看讲义写出切比雪夫与辛钦大数定律的条件和结论;
3. 说明“频率稳定于概率”的严格含义;
4. 面对 $g(X_i)$ 的平均, 正确验证 $g(X_i)$ 的条件;
5. 区分大数定律与中心极限定理分别回答什么问题;
6. 写出和与平均值的中心极限定理标准化式;
7. 识别二项分布正态近似并说明连续性修正的作用.

若有任一项不能独立完成, 应回到相应小节重做例题, 而不是只背最终公式.