

第八章 区间估计

本章导读

点估计只给参数一个估计值, 却没有直接说明误差范围和可靠程度. 区间估计在样本基础上构造一个随机区间, 并让这种构造方法以预先指定的比例覆盖参数真值.

本章的统一主线是

选枢轴量 $\rightarrow$ 写中间概率 $\rightarrow$ 代分位点 $\rightarrow$ 解出参数区间.

看似繁多的正态总体公式, 都来自这四步. 首次学习应理解构造逻辑; 实际做题时还要熟练记忆公式、适用条件和自由度.

8.1 置信区间的概念

8.1.1 随机的是区间, 不是参数

设总体分布含有固定但未知的参数 θ , $X_1, \dots, X_n$ 为简单随机样本.

定义 8.1 (双侧置信区间)

若两个统计量

$$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, \dots, X_n), \quad \hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, \dots, X_n)$$

满足

$$P_{\theta}(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间. 两端分别称为置信下限和置信上限.

$1 - \alpha$ 称为置信水平或置信度, 通常取 0.90, 0.95, 0.99 等较大的数; α 是未覆盖参数的总概

率. 对连续型分布, 区间端点取开或闭不影响概率.

注: [95% 置信度的正确解释] 参数 θ 是固定的. 样本尚未抽取时, 区间端点是随机的; 反复独立抽样并用同一种方法构造许多区间, 其中约 95% 会覆盖真实参数. 得到某个具体区间后, 它要么覆盖真值, 要么不覆盖, 不能再说“这个固定区间有 95% 的概率含有固定参数”.

例题 8.2 (理解重复抽样含义)

用置信水平 0.95 的方法独立构造 1000 个区间, 并不保证恰有 950 个覆盖真值; 覆盖个数是随机的, 但长期比例会接近 0.95. 置信水平评价的是**构造方法的长期覆盖率**, 不是某一个区间的优劣评分.

8.1.2 单侧置信限

若只关心参数的下界或上界, 可以构造单侧区间. 例如

$$P(\theta > \hat{\theta}_L) = 1 - \alpha$$

中的 $\hat{\theta}_L$ 是单侧置信下限. 本章与课程考查重点均为双侧置信区间; 单侧思想将在下一章单侧假设检验中再次出现.

小结

置信区间是由样本决定的随机区间, 置信水平描述重复抽样时的长期覆盖率. 解释具体结果时, 要牢记参数固定、区间随机; 使用双侧区间时还要确认 α 是否被正确分配到两侧.

8.2 区间估计的统一构造原理

8.2.1 枢轴量

定义 8.3 (枢轴量)

由样本和待估参数构成、其概率分布不含任何未知参数的随机变量, 称为枢轴量.

枢轴量与统计量不同: 统计量不能含未知参数, 而枢轴量通常**必须含待估参数**, 只是它的分布不能再含其他未知量. 区间估计正是先把待估参数放入一个分布已知的枢轴量, 再从概率不等式中解出参数.

8.2.2 母型: 正态总体方差已知时估计均值

设 $X_1, \dots, X_n$ 来自 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知、 μ 未知. 枢轴量为

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

本讲义统一使用上分位点: z_γ 满足

$$P(Z > z_\gamma) = \gamma.$$

标准正态分布对称, 因此

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

代入枢轴量并对不等式作等价变形, 得到

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

定理 8.4 (方差已知时正态均值的置信区间)

μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

注: [为什么通常取等尾区间] 中间概率 $1 - \alpha$ 可以有多种分配方式. 本课程采用左右尾各为 $\alpha/2$ 的等尾区间; 在正态对称情形下, 它也给出以 $\bar{X}$ 为中心的最自然对称区间. 公式中的 $z_{\alpha/2}$ 是上 $\alpha/2$ 分位点, 不要误写成 z_α .

例题 8.5 (完整走一遍四步)

设总体 $X \sim N(\mu, 25)$, 抽取容量 $n = 100$ 的样本, 得到 $\bar{x} = 12.4$. 求 μ 的 95% 置信区间.

方差已知, 选枢轴量 $Z = (\bar{X} - \mu)/(5/\sqrt{100})$. 这里 $\alpha = 0.05$, 故 $z_{0.025} = 1.96$. 置信区间为

$$12.4 \pm 1.96 \times \frac{5}{10} = 12.4 \pm 0.98,$$

即

$$(11.42, 13.38).$$

结果检查: 区间以样本均值为中心; 标准差或置信水平增大时区间变宽, 样本量增大时区间变窄.

8.2.3 构造置信区间的五步模板

1. 明确总体类型、待估参数以及其他参数已知还是未知;
2. 选择包含待估参数且分布不含未知量的枢轴量;
3. 用上分位点写出中间概率为 $1 - \alpha$ 的不等式;
4. 对事件作等价变形, 把待估参数单独放在中间;
5. 代入样本观测值, 检查端点顺序、自由度和量纲.

后续公式均可按此模板推得. 按照本课程证明掌握要求, 应理解每个枢轴量为何可用和不等式怎样变形; 考试时不必从头重推全部公式.

小结

区间估计的核心不是背“加减哪一项”, 而是选择分布已知的枢轴量. 统一流程是定条件、选枢轴量、写中间概率、解参数、代数据; 本讲义所有分位点均采用上分位点记法.

8.3 一个正态总体的置信区间

设 $X_1, \dots, X_n$ 来自 $N(\mu, \sigma^2)$, 样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}, S^2$.

8.3.1 均值的置信区间

当 σ^2 已知时, 使用标准正态枢轴量, 公式已经得到. 若 σ^2 未知, 不能把未知的 σ 留在端点中; 正态总体下应改用

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

定理 8.6 (方差未知时正态均值的置信区间)

当 σ^2 未知时, μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right).$$

例题 8.7 (未知方差要换成学生分布)

正态总体方差未知, 样本容量 $n = 16$, 得到 $\bar{x} = 20$, $s = 1$. 求 μ 的 90% 置信区间.

$\alpha = 0.10$, 自由度为 15, 故区间为

$$\left(20 - \frac{t_{0.05}(15)}{4}, 20 + \frac{t_{0.05}(15)}{4} \right).$$

若查得 $t_{0.05}(15)$ 的数值, 再代入即可.

方法选择: 未知方差时使用 S 和 $t(n-1)$, 不能把 S 代入正态公式后仍查 z 表.

8.3.2 方差的置信区间

估计 σ^2 时, 要先看 μ 是否已知.

若 μ 已知, 枢轴量为

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

若 μ 未知, 需用样本均值代替, 枢轴量变为

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

卡方分布不对称. 采用上分位点时, 中间概率写成

$$P(\chi_{1-\alpha/2}^2(k) < Q < \chi_{\alpha/2}^2(k)) = 1 - \alpha.$$

注意 $\chi_{\alpha/2}^2(k)$ 是较大的右侧分位点.

定理 8.8 (正态方差的置信区间)

当 μ 已知时, σ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right).$$

当 μ 未知时, 区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$

注: [卡方区间为什么不是“中心加减”] 卡方分布只取正值且不对称, 区间端点来自除以两个不同的卡方分位点, 通常不以 S^2 为中心. 解不等式时因为 $\sigma^2 > 0$, 取倒数会改变不等号方向; 最稳妥的做法是写完后检查左端分母较大、右端分母较小.

例题 8.9 (先判断均值是否已知)

正态总体均值未知, 容量为 10 的样本得到 $s^2 = 4$. 则 σ^2 的 95% 置信区间为

$$\left(\frac{9 \times 4}{\chi_{0.025}^2(9)}, \frac{9 \times 4}{\chi_{0.975}^2(9)} \right).$$

结果检查: 未知均值消耗一个自由度, 所以分子是 $(n-1)s^2$, 两个卡方分位点的自由度均为 9.

8.3.3 一个总体的公式选择表

待估参数	已知条件	枢轴量	区间关键结构
μ	σ^2 已知	$(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
μ	σ^2 未知	$(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$	$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}$
σ^2	μ 已知	$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$	平方和除以两个卡方分位点
σ^2	μ 未知	$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$	$(n-1)S^2$ 除以两个卡方分位点

小结

估计一个正态总体的均值时, 方差已知用 z , 方差未知用 t ; 估计方差时, 均值已知用自由度 n 的卡方平方和, 均值未知用自由度 $n - 1$ 的样本方差. 每次先判断“估谁、谁已知”, 再选公式.

8.4 两个正态总体的置信区间

设两组样本相互独立, 分别来自

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

样本容量为 n_1, n_2 , 样本均值和方差为 $\bar{X}, S_1^2$ 与 $\bar{Y}, S_2^2$.

8.4.1 均值差: 两个方差均已知

枢轴量为

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1).$$

定理 8.10 (已知方差时均值差的置信区间)

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

这里“ $a \pm b$ ”表示区间 $(a - b, a + b)$.

8.4.2 均值差: 两个方差未知但相等

若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 但共同方差未知, 定义合并样本方差

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

由第六章,

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

定理 8.11 (等方差未知时均值差的置信区间)

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

注: 合并方差公式只能在两个正态总体方差相等的条件下使用. 本课程资料不要求处理“两个方差未知且不等”时的 Welch 区间; 若题目未说明等方差, 不能自行补上条件.

8.4.3 方差比

由第六章,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

定理 8.12 (两个正态总体方差比的置信区间)

σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right).$$

例题 8.13 (按任务选公式)

两组独立正态样本容量分别为 $n_1 = 5, n_2 = 6$. 若比较总体方差, 样本方差为 s_1^2, s_2^2 , 则 95% 置信区间应写成

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.025}(4, 5)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.975}(4, 5)} \right).$$

检查顺序: 分子样本对应第一个自由度 4, 分母样本对应第二个自由度 5; 交换方差比次序时, 自由度也要交换.

小结

两个总体问题先看待估的是均值差还是方差比. 均值差在方差已知时用 z , 方差未知但相等时用合并方差和 t ; 方差比统一用 F . 所有公式都要求两组样本相互独立, 且自由度顺序不能颠倒.

8.5 置信区间的精度与样本量

8.5.1 置信水平、区间长度和样本量的关系

对正态均值、方差已知的区间

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

半宽或允许误差为

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

区间总长度为 $2E$. 由此可见:

- 置信水平越高, α 越小, $z_{\alpha/2}$ 越大, 区间越宽;
- 总体标准差越大, 区间越宽;
- 样本量越大, 区间越窄, 但半宽只按 $1/\sqrt{n}$ 缩小.

可靠性和精度存在张力: 样本量不变时, 提高置信水平通常要牺牲区间长度; 若既要高置信度又要短区间, 就必须增加样本量.

8.5.2 由允许误差反推样本量

若要求半宽不超过给定值 $d > 0$, 则

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d.$$

解得

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{d} \right)^2.$$

样本量必须为整数, 因此最终应向上取整:

$$n_{\min} = \left\lceil \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{d} \right)^2 \right\rceil.$$

例题 8.14 (确定最小样本量)

某心理学家认为反应时间近似服从正态分布, 标准差可按 $\sigma = 0.05$ 秒处理. 希望以 95% 的置信水平估计平均反应时间, 并使误差不超过 0.01 秒. 至少需要多少个样本?

$z_{0.025} = 1.96$, 故

$$n \geq \left(\frac{1.96 \times 0.05}{0.01} \right)^2 = 96.04.$$

向上取整得到

$$n_{\min} = 97.$$

结果检查: 取 96 不满足 $n \geq 96.04$, 所以不能用通常的四舍五入; “区间长度不超过 0.02” 与 “半宽不超过 0.01” 是同一个要求.

小结

对已知方差的正态均值区间, 允许误差就是区间半宽. 反推样本量时先把 “总长度” 换成半宽, 再解不等式并向上取整; 置信度越高、波动越大或误差要求越严, 所需样本量越大.

本章总结

一、公式选择总表

待估参数	条件	置信区间中心或端点结构
单个 μ	σ^2 已知	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$
单个 μ	σ^2 未知	$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1) S / \sqrt{n}$
单个 σ^2	μ 已知	$\sum (X_i - \mu)^2$ 分别除以 $\chi_{\alpha/2}^2(n)$ 、 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
单个 σ^2	μ 未知	$(n-1)S^2$ 分别除以 $\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 、 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
$\mu_1 - \mu_2$	两方差已知	$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$
$\mu_1 - \mu_2$	两方差未知但相等	$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$
σ_1^2/σ_2^2	两组独立正态样本	S_1^2/S_2^2 分别除以两个 F 上分位点

二、通用检查清单

1. 总体是否正态? 是一个总体还是两个独立总体?
2. 待估参数是均值、方差、均值差还是方差比?
3. 其他参数是已知、未知, 还是未知但相等?
4. 使用 z, t, χ^2, F 中哪一种枢轴量? 自由度是多少?
5. 本题给的是置信水平 $1 - \alpha$ 还是 α ? 双侧是否使用 $\alpha/2$?
6. 本讲义采用上分位点; 端点顺序是否正确?
7. 代入后区间是否满足量纲、正负和直观宽窄检查?

三、重点辨析与易错点

- 参数固定、区间随机; 具体区间不能解释为参数有某个概率落入其中.
- 枢轴量可以含待估参数, 但其分布不能含未知参数; 统计量则不能含任何未知参数.
- 方差未知时估计均值要用 t , 不能把 S 填入正态公式后仍查 z 表.
- 卡方和 F 分布不对称, 不能写成“中心加减同一个数”.
- 均值未知时估计方差, 自由度为 $n - 1$; 两个样本的 F 自由度有先后顺序.
- 反推样本量必须向上取整; 区间长度与允许误差相差 2 倍.

四、证明掌握清单

- **A 级, 应能准确写出并应用:** 课程范围内的全部置信区间公式; 根据总体、待估参数和已知条件选择分位点与自由度; 由半宽要求反推样本量并向上取整.
- **B 级, 应理解推导骨架:** “选枢轴量—写概率区间—代分位点—解参数区间”的统一流程; 三个母型及两个总体公式怎样由正态、 t 、卡方、 F 枢轴量得到; 置信水平、区间长度与样本量的关系; 重复抽样解释.
- **C 级, 知道结论即可:** 最短置信区间、枢轴量选择的一般理论、非正态总体的精确区间及渐近区间理论. 这些内容本阶段不要求复现.

五、自测题

练习 8.15

说明“某次算出的 95% 置信区间有 95% 概率包含固定参数”为什么不严谨, 并给出重复抽样解释.

练习 8.16

正态总体方差已知为 9, $n = 36$, $\bar{x} = 10$. 写出 μ 的 95% 置信区间, 并指出半宽.

练习 8.17

正态总体方差未知, $n = 25$, $\bar{x} = 8$, $s = 2$. 写出 μ 的 90% 置信区间, 说明所查分布和自由度.

练习 8.18

分别写出正态总体均值已知与未知时, σ^2 的 $1 - \alpha$ 置信区间, 并解释自由度为什么不同.

练习 8.19

两组独立正态样本方差未知但相等, 说明估计 $\mu_1 - \mu_2$ 时怎样构造 S_w^2 , 以及为何自由度为 $n_1 + n_2 - 2$.

练习 8.20

若已知 $\sigma = 4$, 希望以 99% 的置信度估计正态总体均值, 且误差不超过 1, 写出最小样本量的计算式并说明为什么向上取整.

完成自测后, 应能用一条主线统领全章: 先用已知抽样分布构造枢轴量, 再把中间概率事件等价变形成参数的随机区间.